GAUSS DISTRIBUTION-A COMPLETE PROOF!
LA DISTRIBUZIONE DI GAUSS-DIMOSTRAZIONE COMPLETA!

Leonardo ***Rubino***
leonrubino@yahoo.it
Per www. vixra.org
Giugno 1994 – Rev. 00
Agosto 2011 – Rev. 01

Indice:

Abstract:

Nel presente file si vuole dare una rara dimostrazione della distribuzione di Gauss, visto che la quasi totalità dei testi disponibili (opinione di chi scrive) la enuncia soltanto, senza darne prova.
Si dà poi una descrizione di quella che è la regola del tre sigma, molto usata in campo tecnico.
Per ultimo, si è voluto sottolineare una particolarità della meccanica quantistica, dove l'imposizione del segno di eguaglianza nelle relazioni di indeterminazione di Heisenberg porta appunto ad una funzione d'onda gaussiana, che riduce appunto al minimo la situazione di incertezza quantistica.

Introduzione.

La statistica è probabilmente la scienza alla base di tutto l'Universo, in quanto la stessa meccanica quantistica si basa su di essa.
Si veda, a tal proposito, il mio file al link:

http://vixra.org/pdf/1112.0087v1.pdf

Si vuole qui fare una raccomandazione che vale comunque in qualsiasi ambito scientifico, ossia quella del non fidarsi ciecamente dell'intuizione, in campo statistico e probabilistico. E' vero che, forse, 95 volte su 100 l'intuizione porta a conclusioni corrette, e chi scrive è un forte fruitore dell'intuizione, alla base della quale stanno tantissime scoperte scientifiche, ma è anche vero che, ogni tanto, l'intuizione inganna. A tal proposito, voglio riportare un caso inerente ad una trasmissione televisiva chiamata Let's Make a Deal, in cui vi erano tre porte chiuse e dietro una di esse stava un premio; dopo che il concorrente sceglieva una delle tre porte, il conduttore andava ad aprire una delle due porte non scelte dal concorrente, per mostrare a quest'ultimo cosa vi è (o non vi è) dietro ad essa. Veniva ovviamente aperta una porta che non nascondeva il premio.
A questo punto viene chiesto al concorrente se vuole ora tenere la porta da lui scelta originariamente o se vuole switchare (cambiare) con l'altra, tra le due non scelte, che è rimasta chiusa.
A prima vista, affidandosi all'intuizione, sembrerebbe che cambiare porta non è necessariamente più conveniente che tenere quella già scelta, in quanto si tratta del banale caso di due porte ancora chiuse, dietro una delle quali vi è il premio, dunque si avrebbe ½ (il 50%) di probabilità di avere il premio sia che si tenga la porta attualmente selezionata che switchando sull'altra.
Bene, questo è il classico caso in cui L'INTUIZIONE TRADISCE, in quanto l'ultimo ragionamento fatto è COMPLETAMENTE ERRATO!
La scelta più conveniente è SEMPRE QUELLA DI ABBANDONARE LA PORTA PRECEDENTEMENTE SCELTA e di prendere l'altra! Vediamo perché:

chiamiamo le tre porte A, B e C e supponiamo che tu, concorrente, abbia scelto la porta A; ora:

1-se il premio è dietro B, il conduttore ti aprirà la porta C e dunque, se tu passi a B vinci.

2-se invece il premio è dietro C, il conduttore aprirà e ti mostrerà B e, se tu cambi con C, pure vinci.

3-se invece ancora il premio è dietro A, ossia dietro la porta da te originariamente scelta, il conduttore aprirà indifferentemente B o C e tu, se cambi perdi, mentre se tieni A, vinci.

Potete facilmente verificare che il cambiare (switchare) porta conduce alla vittoria del premio in ben due casi su tre (1 e 2), mentre porta a perdere solo in uno su tre (caso 3).
NON E' DUNQUE VERO CHE TENERSI LA PORTA CHE GIA' SI E' SCELTA E' INDIFFERENTE, ma bensì è sempre conveniente cambiare!

Capitolo 1: Concetti introduttivi.

Par. 1.1: Sulla Probabilità di un evento e dintorni.

Se su n prove possibili un evento si può verificare favorevolmente k volte, si dice che la sua probabilità p è:

$p = \frac{k}{n}$ $(0 \le p \le 1)$; p=1 (100%) è l'evento certo, mentre p=0 è l'evento impossibile.

La probabilità dell'evento contrario è q:

$$q = \frac{n-k}{n}.$$

Ovviamente: p+q=1.

Se si hanno più di due eventi, ossia m eventi, si può dire che:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Esempio: nel lanciare un dado, qual è la probabilità che esca una certa faccia?

$$q = \frac{k}{n} = \frac{1}{6}.$$

La Frequenza di un evento.

Se eseguiamo m prove e l'evento B si verifica m_B volte, la frequenza dell'evento B è:

$n = \frac{m_B}{m}$; $0 \le n \le 1$ e $\sum_{i=1}^{m} n_i = 1$.

C'è una similitudine col concetto di probabilità.
Il concetto di probabilità è di natura astratta (matematica), mentre quello di frequenza è di natura empirica (fisica).

La legge dei grandi numeri, o legge empirica del caso, o legge di G. Bernoulli:
(questo è un postulato di natura sperimentale)

Al crescere del numero delle prove, la frequenza di un evento tende a diventare uguale alla sua probabilità.
In modo più volgare: con un gran numero di prove, la pratica tende alla teoria.

La Probabilità totale:

Se C si verifica quando si verifica uno qualsiasi dei k fenomeni B_1, ,B_k, escludentisi a vicenda, e ciascuno con probabilità singole $p_1,\ldots,p_k$, la probabilità di C è:

$$p_C = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Esempio: lancio un dado; qual è la probabilità che esca l'uno o il due? (basta che esca uno dei due)

$$p_C = \sum_{i=1}^{2} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

La somma di probabilità è una probabilità maggiore.

La Probabilità composta:

Se C si verifica quando si verificano tutti gli eventi $B_1, B_2, \ldots, B_k$, ognuno di probabilità $p_1, \ldots, p_k$, allora

$$p_C = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots\ldots p_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

Esempio: lancio tre dadi; qual è la probabilità che esca il cinque su tutti e tre contemporaneamente?

$$p_C = \prod_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Il prodotto di probabilità è una probabilità minore.

Sul concetto di distribuzione:

L'insieme di tutte le probabilità di tutti i valori che la variabile casuale x può assumere è detta la distribuzione delle probabilità di x.

Valor medio di x:

$$\hat{x} = \frac{\sum x}{n}$$

E, per una media pesata, ossia se ogni valore x_i di x ha una probabilità sua p_i:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Nel passaggio al continuo, non si hanno singoli valori discreti x_i, ma infiniti valori, come quelli che x può assumere in un certo intervallo, e le sommatorie, notoriamente, diventano integrali:

se dp è la probabilità che x sia compreso tra x e $x + dx$, allora:

$dp = f(x)dx$, con $f(x)$ che è la densità di probabilità.

Molto intuitivamente, la probabilità che x stia tra a e b è:

$P_{a,b} = \int_a^b f(x)dx$; inoltre, per la definizione di probabilità massima:

$\int_X f(x)dx = 1$, dove X è il campo di variabilità di x.

La FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE F(t) corrispondente ad $f(x)$ è:

$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$, sicchè: $P_{a,b} = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Sui libri, F(t) è tabulata.

Sempre nel caso del continuo, il valor medio di x è:

$\hat{x} = \int_X x \cdot f(x)dx$ (media di x pesata con i pesi proporzionali a $f(x)$)

E per il <u>valor medio di una funzione g(x):</u>

$\hat{g}(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \cdot p_i$ (nel discreto)

$\hat{g}(x) = \int_X g(x) \cdot f(x)dx$ (nel continuo)

<u>Valor medio del quadrato (caso del discreto):</u>

$$vm\_di\_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$$

<u>Valor quadratico medio:</u>

$$vqm = \sqrt{vm\_di\_x^2}$$

<u>Lo scarto:</u>

$$\Delta x_i = s = x_i - \hat{x}$$

<u>La varianza:</u>

essa è il valor medio dei quadrati degli scarti:

$s\,(x^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})^2 \cdot p_i$.

Nel continuo, si ha: $s\,(x^2) = \int_X (x - \hat{x})^2 \cdot f(x)dx$

<u>Una proprietà della varianza:</u>

$$s\,(x^2) = vm\_di\_[(x-\hat{x})^2] = vm\_di\_[x^2 - 2x\hat{x} + (\hat{x})^2] = (vm\_di\_x^2) - 2\hat{x}\hat{x} + (\hat{x})^2 = (vm\_di\_x^2) - (\hat{x})^2 \quad (1.1)$$

<u>Lo scarto quadratico medio:</u>

$s\,(x) = \sqrt{s\,(x^2)}$ (è la radice della varianza)

Par. 1.2: Prove ripetute.

La Legge Binomiale di Bernoulli:

esponiamola tramite un esempio: si lancia un dato 5 volte. Qual è la probabilità che esca due volte una data faccia?

(p=1/6, q=5/6, n=5, k=2)

$$\boxed{P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \tag{1.2}$$

($\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$) $\qquad P_2 = \dfrac{5!}{2!3!}(\dfrac{1}{6})^2(\dfrac{5}{6})^3 = 0{,}16075 = 16{,}075\%$

Dimostrazione:

Calcoliamo P_0 (k=0, ossia l'evento non si verifica); l'evento contrario, che ha probabilità (1-p)=q si presenta in tutte le n prove con probabilità $(1-p)^n=q^n$, dunque: $P_0 = q^n = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0}$

Calcoliamo ora P_1, cioè l'evento si verifica nella r-esima prova con probabilità p^1, mentre nelle (n-1) prove rimanenti si verifica l'evento contrario con probabilità $q^{(n-1)}$; inoltre, r può essere scelto in n modi diversi; si ha:

$$P_1 = np\ \ q^{n-1} = \binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$$

Calcoliamo ora P_2, ossia quando l'evento si verifica nella r-esima e nella s-esima prova con probabilità p^2, mentre gli eventi contrari hanno probabilità $q^{(n-2)}$; tuttavia, i due numeri r ed s possono essere scelti tra n numeri ed in $\dfrac{n(n-1)}{2}$ modi diversi, cioè in $\binom{n}{2}$ modi diversi; infatti, il primo lo scelgo in n modi, mentre per il secondo restano (n-1) modi ed essendo gli eventi indistinguibili, bisogna dividere per due, poiché uno varrebbe l'altro. Dunque:

$$P_2 = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2} = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$$

Nel caso di P_k, la probabilita dell'evento favorevole è p^k e quella dell'evento contrario è $q^{(n-k)}$ e le k prove possono essere prese in $\binom{n}{k}$ combinazioni diverse, da cui l'asserto.

Valor medio di k:

$$\hat{k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$$

(si diano ad n dei valori diversi e si vedrà che questa equazione è sempre verificata)
per dimostrarla, si tenga conto innanzitutto che la sommatoria può partire anche da k=1, in quanto per k=0 si ha un valore nullo, dunque omissibile. Inoltre, tenendo conto della espressione per il binomio di Newton per $(a+b)^n$, si ha: (binomio di N.: $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$)

$$\hat{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}pp^{k-1}q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=np(p+q)^{(n-1)}=np$$

Il valore più probabile di k è dunque np, o l'intero più vicino ad esso.

Inoltre, sempre per il binomio di Newton, si ha che: $\sum_{k=0}^{n}P_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=1$

varianza di k:

$$s(k^2)=vm\_di\_[(k-\hat{k})]^2=vm\_di\_[(k-np)]^2=\sum_{k=0}^{n}(k-\hat{k})^2\cdot P_k=npq\,;$$

infatti,

$$vm\_di\_(k^2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}k^2p^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}[k(k-1)+k]p^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)]\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=$$

(ora, nell'ultimo membro, la prima sommatoria può partire da k=2, mentre la seconda già la calcolammo, quindi:)

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}q^{n-k}+np=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np=n(n-1)p^2+np=$$

$=n^2p^2-np^2+np=vm\_di\_(k^2)$ e dunque, considerando che, per la (1.1):

$s(k^2)=vm\_di\_[(k-\hat{k})^2]=(vm\_di\_k^2)-(\hat{k})^2$, discende che:

$$s(k^2)=(vm\_di\_k^2)-(\hat{k})^2=(n^2p^2-np^2+np)-n^2p^2=np(1-p)=\boxed{nqp}$$

La radice di tale quantità sarà ovviamente lo scarto quadratico medio di k: $s(k)=\sqrt{s(k^2)}=\sqrt{nqp}$.

Par. 1.3: Richiami di calcolo combinatorio.

combinazione di n elementi presi a gruppi di k:

per quanto detto all'inizio di pagina 6 sul modo di scegliere due numeri r ed s tra n, si aveva che tali modi erano $\binom{n}{2}$.

Dunque, la combinazione di n elementi presi a gruppi di k è:

$$C_{n,k}=\binom{n}{k}$$

Ora, se i gruppi di k elementi possono differire anche per l'ordine nel quale compaiono, si parla di "disposizione" di n elementi a gruppi di k:

$$D_{n,k}=k!C_{n,k}$$

Infatti, riguardo le diverse disposizioni di k elementi, è noto che con k colori si possono fare k! bandiere, da cui la "permutazione" di n elementi presi a gruppi di n:

$$P_{n,n} = D_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Par. 1.4: La Distribuzione Multinomiale.

Se si eseguono n prove e si vuole che l'evento 1, con probabilità p_1, si verifichi k_1 volte, l'evento 2, con probabilità p_2, si verifichi k_2 volte e l'evento n, con probabilità pn, si verifichi k_n volte, la probabilità che ciò accada è:

$$P_{(k_1,k_2,...,k_n)} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$$

<u>Esempio:</u> si ha una scatola con 50 palline, 20 bianche, 10 rosse, 5 nere e 15 gialle; calcolare la probabilità P che estraendo 10 palline, queste siano 3_R, 2_B, 4_N e 1_G (dopo ogni estrazione, la pallina viene rimessa nella scatola):

$$P_{(3_R,2_B,4_N,1_G)} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 1!}(\frac{1}{5})^3(\frac{2}{5})^2(\frac{1}{10})^4(\frac{3}{10})^1$$

Par. 1.5: La Distribuzione Ipergeometrica.

Se da una scatola con N palline, di cui k rosse, si esegue un'estrazione di x palline ($x \le k$) ed ogni pallina estratta <u>non</u> viene riposta nella scatola, bisogna abbandonare la Legge di Bernoulli e ricorrere alla distribuzione ipergeometrica; la possibilità di estrarre in sequenza x palline rosse ed (n-x) palline di altro colore è ovviamente (il prodotto di tutte le probabilità delle estrazioni):

$$P'(x) = \frac{k}{N} \cdot \frac{k-1}{N-1} ...... \frac{k-(x-1)}{N-(x-1)} \cdot \frac{N-k}{N-x} \cdot \frac{N-k-1}{N-x-1} \cdot \frac{N-k-(n-x-1)}{N-(n-1)} =$$

$$= \frac{k!}{(k-x)!} \cdot \frac{(N-n)!}{N!} ...... \frac{(N-k)!}{(N-k-n+x)!} = \frac{k!}{N!} \cdot \frac{(N-n)!}{(k-x)!} \cdot \frac{(N-k)!}{(N-k-n+x)!};$$

il numero complessivo di queste sequenze di palline è il numero di combinazioni di n oggetti a x a x:

$C(n,x) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, dunque, la probabilità totale di avere x palline rosse è:

$P(x) = C(n,x)P'(x) = \frac{C(k,x)C(N-k,n-x)}{C(N,n)}$ (legge ipergeometrica)

con:
k=n. di palline rosse
n=n. di estrazioni
N=n. totale di palline
x=n. di palline rosse che si vogliono estrarre (variabile ipergeometrica)

Par. 1.6: La Distribuzione Normale di Gauss.

Essa è una approssimazione della distribuzione di Bernoulli (1.2) quando il n. di prove tende ad infinito.

Riportiamo qui l'espressione della distribuzione di Bernoulli:

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} \qquad (1.3)$$

e riportiamo qui anche una espressione per l'approssimazione del fattoriale di un numero, detta Formula di Stirling: $x! \approx (\sqrt{2p})x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$

<u>ecco una dimostrazione della Formula di Stirling:</u>

consideriamo l'espressione $\ln x!$; per essa, se x è un intero, possiamo scrivere che:

$\ln x! = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(x-1) + \ln x = \sum_1^x \ln x = \sum_1^x \ln x \cdot (\Delta x)$, con $(\Delta x) = 1$, in quanto, parlandosi di un intero, si hanno salti di una unità.

Ora, per x molto grande, $(\Delta x) = 1$ sarà piccolo rispetto ad x stesso e dunque (Δx) sarà considerabile come un dx e la sommatoria diverrà un integrale:

$\ln x! = \int_1^x \ln x \cdot dx = x\ln x - x + 1$, ossia:

$$\ln x! = x\ln x - x + 1 \ . \qquad (1.4)$$

Elevando ora la base dei logaritmi neperiani e=2,718 a tali quantità espresse nei due membri della (1.4), si ha:

$$e^{\ln x!} = x! = e^{(x\ln x - x + 1)} = \frac{e^{x\ln x}}{e^x} e = e^{(\ln x)x} e^{-x} e = x^x e^{-x} e = (x^{-\frac{1}{2}} e) x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \approx (\sqrt{2p}) x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

dove l'ultimissima eguaglianza (quella col $\sqrt{2p}$) la accettiamo proprio in virtù del fatto che si sta parlando di una approssimazione.

Dunque:

$$x! \approx (\sqrt{2p}) x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \text{ (Formula di Stirling)} \qquad (1.5)$$

Ripartendo ora dalla distribuzione di Bernoulli (1.3) in x:

$P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$ e dalla Formula di Stirling (1.5):

$$x! \approx (\sqrt{2p}) x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

e ricordando che a pag. 6 avevamo ottenuto np come espressione per il valor medio di k, definiamo un $n = np - x$, da cui: $x = np - v$ e sostituiamo tale x nella espressione di Bernoulli, qui sopra:

$$P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n+v-np)!(np-v)!} p^{(np-v)} q^{(n+v-np)} \cong \text{(per Stirling)}$$

[e poi anche perchè: (1-p)=q]

$$\cong \frac{\sqrt{2p}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2p}\,(nq+v)^{(nq+v+\frac{1}{2})} e^{(-nq-v)} \sqrt{2p}\,(np-v)^{(np-v+\frac{1}{2})} e^{(-np+v)}} p^{(np-v)} q^{(nq+v)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} p^{(np-v)} q^{(nq+v)}}{[nq(1+\frac{v}{nq})]^{nq+v+\frac{1}{2}} [np(1-\frac{v}{np})]^{np-v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \frac{1}{(1+\frac{v}{nq})^{nq+v+\frac{1}{2}} (1-\frac{v}{np})^{np-v+\frac{1}{2}}}$$

Ricordando ora che a^x si può scrivere anche come: $a^x = e^{x \ln a}$ e ricordando anche che, per gli Sviluppi in Serie di Taylor, si ha:

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots \approx x$$

da cui: $\ln(1+\frac{v}{nq}) \approx \frac{v}{nq}$ e $\ln(1-\frac{v}{np}) \approx -\frac{v}{np}$, si ha:

$$P_x = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \exp[-(nq+v+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{v}{nq})] \exp[-(np-v+\frac{1}{2}) \ln(1-\frac{v}{np})] \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \exp[-(nq+v+\frac{1}{2})(\frac{v}{nq} - \frac{v^2}{2n^2q^2})] \exp[-(np-v+\frac{1}{2})(-\frac{v}{np} - \frac{v^2}{2n^2p^2})] \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \exp[-\frac{v^2}{2npq} + \frac{v(p-q)}{2npq}] \qquad (1.6)$$

Se ora, nella (1.6), $p \cong q \cong \frac{1}{2}$, e ricordando poi come definimmo v , si ha:

$$P_x = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \exp(-\frac{v^2}{2npq}) = \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} \exp[-\frac{(x-np)^2}{2npq}] \text{ , ossia:}$$

$$\boxed{P_x = \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} e^{[-\frac{(x-np)^2}{2npq}]}} \qquad \text{(Distribuzione di Gauss)} \qquad (1.7)$$

Se invece la condizione precedente $p \cong q \cong \frac{1}{2}$ non è pienamente soddisfatta, il secondo addendo nell'esponenziale della (1.6) genererà una asimmetria intorno al valore $v = 0$, o, ciò che è lo stesso, intorno ad x=np, ma tale asimmetria scompare per $n \to \infty$, in quanto si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v(p-q)}{2npq} = 0 .$$

Per motivi estetici, riscriviamo ora la (1.7) in k, invece che in x:

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{2pnpq}} e^{[-\frac{(k-np)^2}{2npq}]}$$

Definendo ora la funzione $j(z) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{[-\frac{(k-np)^2}{2npq}]} = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{[-\frac{1}{2}z^2]}$, con $z = \frac{(k-np)}{\sqrt{npq}}$, si ha che $j(z)$ è la "legge normale della probabilità" o "curva degli errori di Gauss".

Ricordando poi le espressioni che ottenemmo per lo scarto semplice ($s = |k - \hat{k}| = |k - np|$) e per lo scarto q.m. di k ($s(k) = \sqrt{s(k^2)} = s_k = \sqrt{nqp}$), si ha:

$$P_k = f(k) = \frac{1}{s_k \sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{k-\hat{k}}{s_k})^2} = \frac{1}{s_k \sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{s_k})^2} \tag{1.7}$$

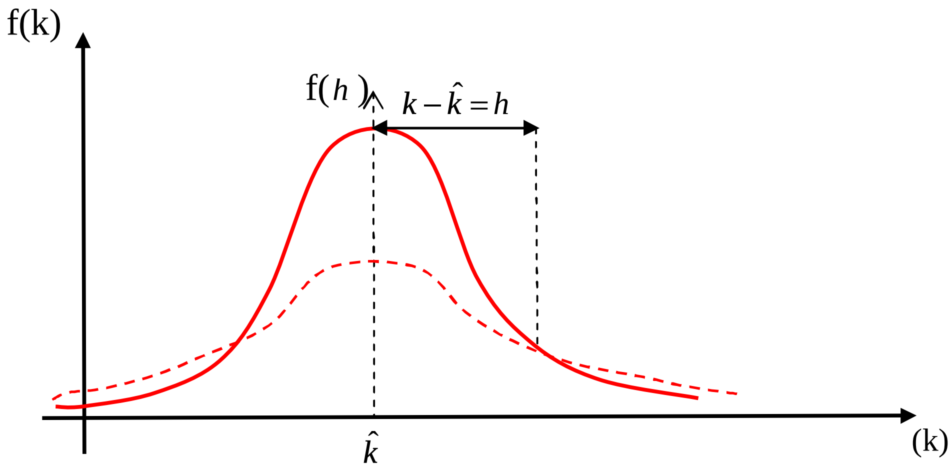

Fig. 1: Gaussiana.

Valutiamo ora la probabilità che l'evento si verifichi un numero di volte compreso tra k_a e k_b :

$P_{k_a, k_b} = \int_{k_a}^{k_b} P_k dk = \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{s_k \sqrt{2p}} e^{[-\frac{(k-np)^2}{2npq}]} dk$; passando ora alla variabile d'integrazione z:

$$P_{k_a, k_b} = \int_{z_a}^{z_b} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{z_a}^{z_b} j(z) dz \ .$$

Consideriamo ora la funzione:

$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{t} j(z) dz$; si ha che:

$P_{k_a, k_b} = f(t_b) - f(t_a) = f(\frac{k_b - np}{\sqrt{npq}}) - f(\frac{k_a - np}{\sqrt{npq}})$. Esistono tabelle di valori della funzione $f(t)$.

La regola del $3s$:

Riprendiamo la (1.7):

$$P_k = f(k) = \frac{1}{s_k \sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{k-\hat{k}}{s_k})^2} = \frac{1}{s_k \sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{s_k})^2} = P(s)$$

Tale P(s) è la probabilità che lo scarto sia compreso tra due valori prefissati; ora, a livello differenziale, la probabilità dp che lo scarto s sia compreso entro l'intervallo infinitesimo ds è:

$dp = P(s)ds = \frac{1}{s_k\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{s_k})^2} ds$ e, quindi, la probabilità che lo scarto s sia compreso tra i valori s_1 ed s_2 è P:

$$P_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} dp = \int_{s_1}^{s_2} P(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s_k\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{s_k})^2} ds \qquad (1.8)$$

$P_{1,2}$ è l'area sottesa dalla Gaussiana tra s_1 ed s_2; si calcola facilmente, tramite l'integrale della (1.8), che:

-0,68σ<s<0,68σ → P=50%
-σ<s<σ → P=68,3%
-1,64σ<s<1,64σ → P=90%
-2σ<s<2σ → P=95,9%
-2,58σ<s<2,58σ → P=99%
-3σ<s<3σ → P=99,7%

Allora, la probabilità che lo scarto dal valore medio di una misura sia compreso tra -3σ e +3σ è del 99,7%, ossia un valore piuttosto accettabile, da cui la frequente adozione della regola del tre sigma appunto.

Par. 1.7: Un segnale della Natura: la Gaussiana in Meccanica Quantistica.

Sempre nel mio file al link:

http://vixra.org/pdf/1112.0087v1.pdf

si ricavano le seguenti relazioni di indeterminazione:

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\mathbf{h}}{2}$ e $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\mathbf{h}}{2}$.

Ci chiediamo in quale caso particolare valga il segno di ugualianza, ossia in che caso il prodotto delle due intererminazioni (ossia dei due delta) sia il più basso possibile, ossia il meno incerto possibile, ossia il più certo possibile; a tal proposito, si rieffettua la dimostrazione dell'equazione $\Delta F \cdot \Delta G \geq \frac{1}{2}\left|\langle i[F,G]_\Psi \rangle\right|$ in quest'altro modo:

(per le definizioni dei vari Δ_F, Δ_G e $\Delta F, \Delta G$ si faccia sempre riferimento al link qui sopra) introduciamo l'operatore $O_l = l\Delta_F + i\Delta_G$ ($l \in \Re$); esso è palesemente non hermitiano, in quanto: $O_l^+ = l\Delta_F - i\Delta_G \neq O_l$; la norma di $O_l\Psi$ è, per definizione di norma, positiva $(O_l\Psi, O_l\Psi) \geq 0$.
Essendo poi $(O_l\Psi, O_l\Psi) = (\Psi, O_l^+ O_l\Psi)$ ed esplicitando, si ha:
$(O_l^+ O_l = \Delta_F^2 + \Delta_G^2 + il\Delta_F\Delta_G - il\Delta_G\Delta_F)$
$l^2 < \Delta_F^2 > + l < i[\Delta_F, \Delta_G] > + < \Delta_G^2 > \geq 0$, ossia:
$l^2(\Delta F)^2 + l < i[F,G] >_\Psi + (\Delta G)^2 \geq 0$; il discriminante di tale forma quadratica è negative o nullo, visto il tipo di disegualianza, dunque:
$(< i[F,G] >_\Psi)^2 - 4(\Delta F)^2(\Delta G)^2 \leq 0$, da cui l'asserto.

Vale quindi il segno di eguaglianza quando il discriminante è nullo ed in corrispondenza di ciò, si ottiene:

$l_{\min} = -\frac{<i[F,G]>_{\Psi}}{2(\Delta F)^2}$; in corrispondenza di tale valore, si ha: $(O_{l_{\min}}\Psi, O_{l_{\min}}\Psi) = 0$, cioè: $O_{l_{\min}}\Psi = 0$. Esplicitando, in quest'ultima relazione, $O_{l_{\min}}$, si ha:

$$[\frac{<-i[F,G]>}{2(\Delta F)^2}(F-<F>)+i(G-<G>)]\Psi = 0. \qquad (1.9)$$

Nel caso in cui F=x e G=p_x=$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, si ha: $-i[F,G] = -i[x, p_x] = \hbar$, e la (1.9) si può così scrivere:

$[\frac{x-<x>}{2(\Delta x)^2}+\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{<p_x>}{\hbar}]\Psi = 0$, ossia:

$\frac{d\Psi}{\Psi} = [-\frac{x-<x>}{2(\Delta x)^2}+i\frac{<p_x>}{\hbar}]dx$, la cui soluzione è:

$\Psi(x) = Ne^{-\frac{(x-<x>)^2}{4(\Delta x)^2}}e^{i\frac{<p_x>}{\hbar}x}$, che è un pacchetto d'onde di forma gaussiana centrato in <x>.

Grazie per l'attenzione.

Leonardo RUBINO
E-mail: leonrubino@yahoo.it

Bibliografia:

1) APPUNTI VARI E RIASSUNTI PERSONALI DI PROBABILITA' E STATISTICA, estrapolati da svariati libri di testo standard di Probabilità e Statistica.
