Moto:” Geometria este ştiinţa care restaurează situaţia dinainte de creaţia lumii şi încearcă să umple “golul” renunţând la oficiile materiei ”
Lucian Blaga, *Discobolul*

LOBE EXTERIOARE ŞI CVAZILOBE INTERIOARE CERCULUI UNITATE

Mircea Eugen Şelariu

1. INTRODUCERE.
CVADRILOBE (QL) EXTERIOARE CERCULUI UNITATE

Cvadrilobele (în limba engleză quadrilobes) exterioare cercului unitate sau trigonometric (Fig.**1**), de raza R = 1, au fost introduse în matematică în anul 2005, ca şi trilobele şi polilobele, prin lucrarea [9], simultan cu funcţiile periodice cvadrilobe cosinus cvadrilob **coqθ** şi sinus cvadrilob **siqθ** a căror expresii de definiţie sunt

(1) $$\begin{cases} coq\theta = coq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ siq\theta = siq[\theta, S(s,\varepsilon)] = \dfrac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases},$$

în care **s** şi **ε** sunt coordonatele polare radiale şi, respectiv, unghiulare ale **excentrului** sau polului **S**(s, ε): raza polară **s**, sau **excentricitatea numerică** liniară şi unghiul polar sau azimutul **ε**, sau **excentricitatea unghiulară**. Pentru s = ± 1 cvadriloba degenerează într-un pătrat perfect, circumscris cercului unitate (Fig.**1,a** şi Fig. **2**), denumit şi **pătrat supermatematic** (SM) pentru a se distinge de pătratul **Alaci**, înscris în cercul unitate şi rotit cu ± π/4 (Fig. **1,b** , Fig. **3** şi Fig. **4**).

În aceeaşi lucrare, au fost prezentate şi aplicaţiile acestor funcţii, la descrierea unor sisteme oscilante de caracteristică elastică statică (**CES**) neliniară de forma **CES Duffing** şi de forţă elastică F_e

(2) $F_e = kx \pm \mu x^3$

cu un termen în plus, de ordinul 5, faţă de CES **Duffing**, adică de forma

(3) $F_e = ax + bx^3 + cx^5$,

a căror formă explicită, la proiectarea mişcării circulare de viteză unghiulară constanta Ω, în jurul excentrului punct fix S(s ≡ k, ε = 0), adică **s** şi **ε** → constante, a unui punct de masă m = 1, pe cvadriloba exterioară, mişcare proiectată pe axa x şi, respectiv, y este [9]

(4) $$\begin{cases} F_e(x) = \dfrac{\Omega^2}{1-k^2}[(1-2k^2)x + 2k^2(2+k^2)x^3 + 3k^4x^5] \\ F_e(y) = \dfrac{\Omega^2}{1-k_2}[(1+2k^2)y - 2k^2(2+k^2)y^3 + 3k^4y^5] \end{cases}$$

în care k ≡ s.

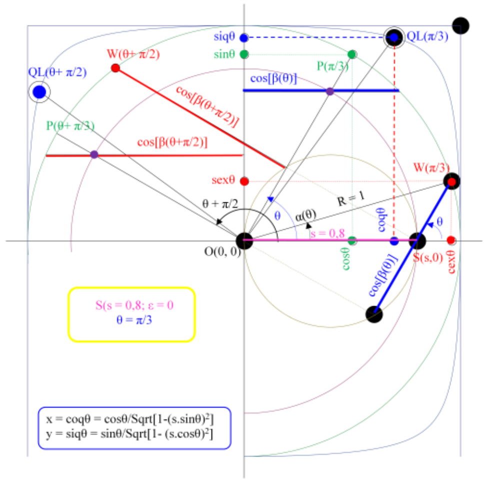


Fig.**1,a** Reprezentarea grafică a cvadrilobelor interioare de s = 0,8 şi θ = π/3 şi a funcţiilor cosinus şi sinus centrice (**cosθ, sinθ**), excentrice (**cexθ, sexθ**) şi cvadrilobe (**coqθ, siqθ**)

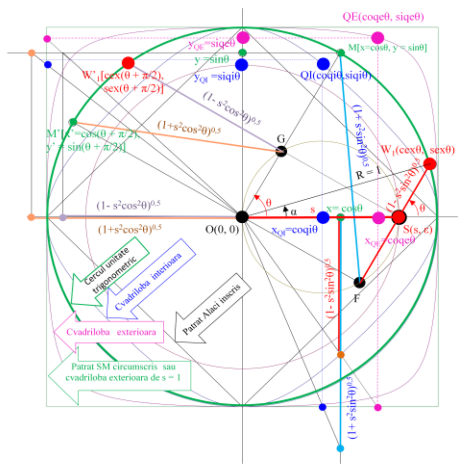


Fig.**1,b** Reprezentarea grafica a cvadrilobelor interioare şi a cvadrilobelor exterioare cercului unitate/trigonometric şi a funcţiilor cvadrilobe cosinus şi sinus cvadrilobe

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

Odată cu apariţia şi a cvazicvadrilobelor interioare cercului unitate, cosinusul şi sinusul cvadrilobice exterioare se notează ca şi până în prezent, adică **coqθ** şi **siqθ**, iar cele interioare se vor nota cu un **q** (cvazi / quasi) suplimentar, adică **qcoqθ** şi **qsiqθ**, pentru diferenţierea lor şi pentru evitarea confuziilor, altfel posibile.

Pentru ca o curbă să fie din **familia lobelor** (bi-, tri-, cvadri-, ş.a.m.d) ea trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

```
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]},
{s,0,10}], {t,0,2.01 Pi}]]
```

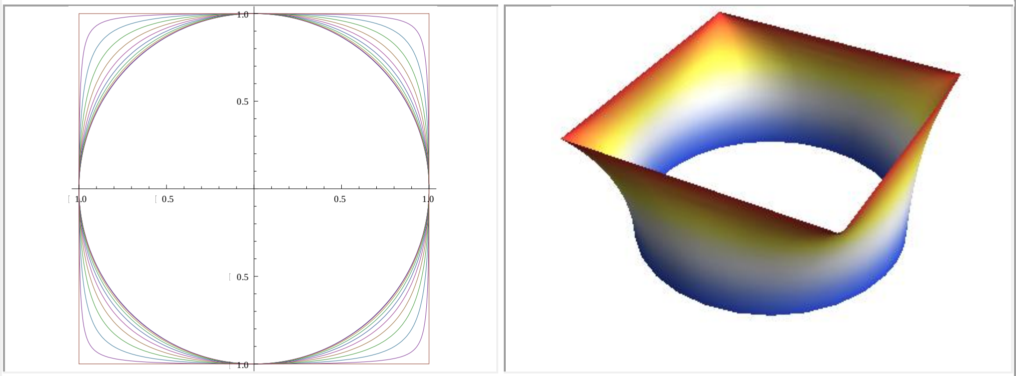


Fig.**2** Cvadrilobe exterioare cercului unitate

1) Să fie o curbă închisă, pentru toate valorile date excentricităţii numerice liniare **s** în domeniul **S**(**s** $\in$[0,1]; **ε** = 0);
2) Pentru **s** = 0 să degenereze într-un cerc perfect;
3) Pentru **s** = 1 să degenereze într-un poligon perfect, regulat sau neregulat.

Se spune că “degenerează” pentru că, plecând de la **s** = 0, care este domeniul matematicii centrice (**MC**), la **s** = 1, se ajunge la un poligon, adică, din nou la o figură comună acestei matematici ordinare. Ambele poligoane, sau pătrate, de exemplu, sunt identice **ca formă**, şi totuşi, diferenţele dintre poligoanele sau pătratul **MC** şi poligoanele sau pătratul matematicii excentrice (**ME**) sunt colosale.

Pătratul **MC** nu are ecuaţii sau, mai precis, nu avea ca cercul, de exemplu, el compunându-se din patru segmente de dreaptă congruente şi paralele, două câte două, pe când pătratul **ME** are ecuaţiile parametrice (1), obţinute pentru s = ± 1 în ecuaţiile (1) sau cu ajutorul funcţiei supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) derivată excentrică de variabilă excentrică dex**θ**

$$(5)\quad \begin{cases} x = R\,dex[\theta, S(s,\varepsilon)] \\ y = R\,dex[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s,\varepsilon)] \end{cases}, \qquad dex\theta = 1 - \frac{s.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-s^2\cos^2(\theta-\varepsilon)}}$$

Cvazicvadrilobele, prezentate în figura **3,a**, respectă doar două din cele trei condiţii; ele degenerând, pentru s = 1, într-un pătrat cu colţuri rotunjite, care nu este un pătrat perfect, iar pentru s > 1 ia forma astroidelor din figura **3,b**.

2. CVAZICVADRILOBE (QQL) INTERIOARE CERCULUI UNITATE

S-a constatat că, prin schimbarea semnului minus cu semnul plus, în radicalul de la numitorul relaţiilor (1), de definiţie a cvadrilobelor exterioare, se obţin cvazicvadrilobe interioare cercului unitate, rotite cu π/4 ca şi pătratul **Alaci Valeriu** (Fig. **3,a**, Fig. **3,b** şi Fig.**4**).

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}, {s,0,10}], {t,0,2.01 Pi}]]

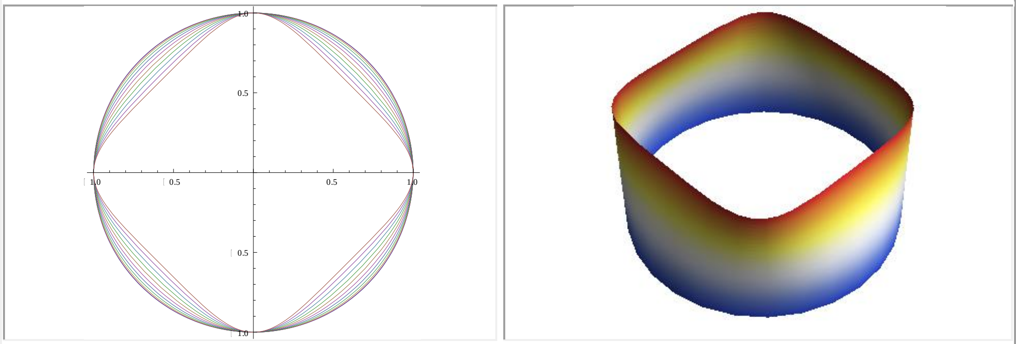


Fig.**3,a** Cvazicvadrilobe interioare cercului unitate, pentru s ∈ [0, 1]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}, {s,-10,30}], {t,0,2.01 Pi}]]

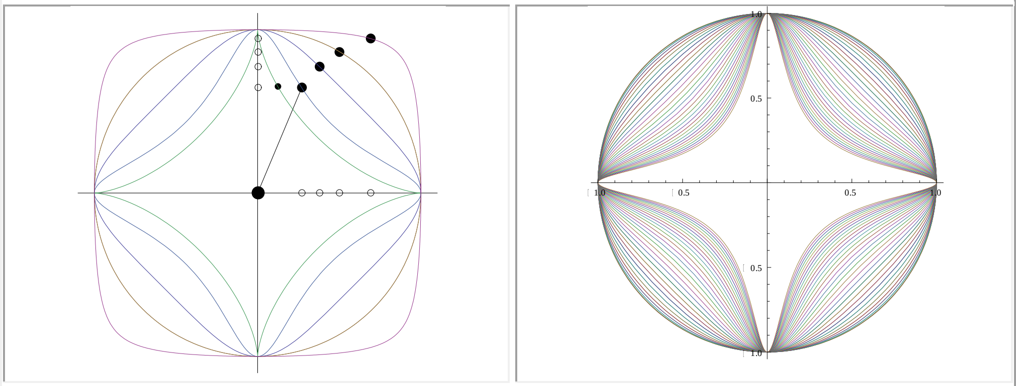


Fig.**3,b** Cvazicvdrilobe astroidale, pentru s ∈ [0, 3]

În consecinţă, relaţiile parametrice, de definiţie ale cvazicvadrilobelor interioare cercului unitate, vor avea următoarele relaţii de definiţie

$$(5)\qquad \begin{cases} qcoq\theta = \dfrac{\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 sin^2(\theta-\varepsilon)}} \\ qsiq\theta = \dfrac{\sin(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1+s^2 cos^2(\theta-\varepsilon)}} \end{cases}$$

Se ştie că radicalul, din expresia lui siqθ, este, totodată, funcţia specială delθ ca şi funcţia eliptică **Jacobi** dn(u,k), pentru k = s (fig. **5**) , adică

$$(6)\qquad del\theta = \sqrt{1-s^2 sin^2\theta}$$

Punctul generator **P** a **FCC** sinθ şi cosθ pe cercul unitate CU(1, O) este de coordonate polare centrice **P**(1, θ) şi, în figura 1, este la θ = $\frac{\pi}{3}$, în timp ce, punctul generator **W_1** al **FSM-CE** **$cex_1\theta$** şi **$sex_1\theta$** apare pe CU(1, O) la un unghi **α** la centrul O dat de relaţia sau **FSM-CE** **amplitudine excentrică** **aex θ**

(7) α = **aexθ** = θ – arcsin[s.sin(θ - ε)],

care, pentru θ = $\frac{\pi}{3}$ şi s = 0,8 (Fig. **1,a**), are valoarea de α = 0,28180472497614373 radiani, cea ce corespunde la α = 16,146221387977935^0 , adică 16^0 8' 46,397".

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}, {Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/ Sqrt [1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2]}},{s,0,10}],{t,0,2.01 Pi}]]	ParametricPlot3D[{{Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2],1-0.1 s}, {Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2], Cos[t-Pi/2]/ Sqrt[1+(0.1 s Sin[t-Pi/2])^2], 1+0.1 s}}, {s,0,10},{t,0,2.01 Pi}]

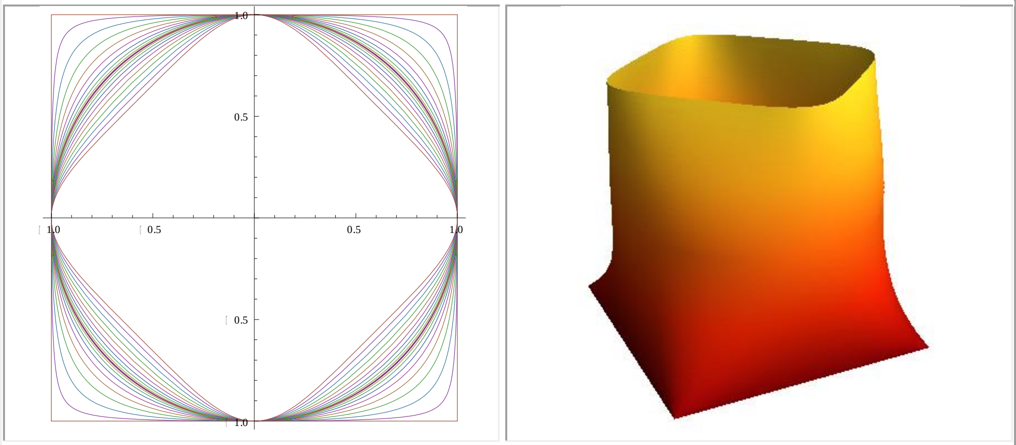


Fig. 4 Cvadrilobe exterioare şi interioare reprezentate împreună

$del\theta = \sqrt{1 - s^2 sin^2\theta}$	$qdel\theta = \sqrt{1 + s^2 sin^2\theta}$

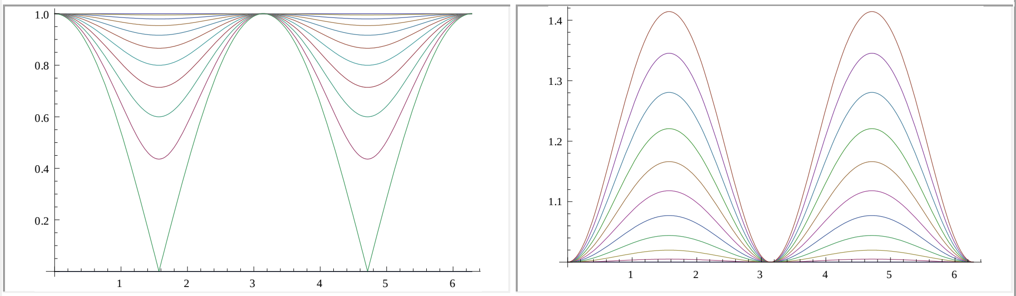


Fig.**5** Funcţiile speciale delta Δ = delθ şi cvazidelta qΔ = qdelθ

Graficele de variaţie ale unghiului la centru α(θ) sunt date în figura **7**

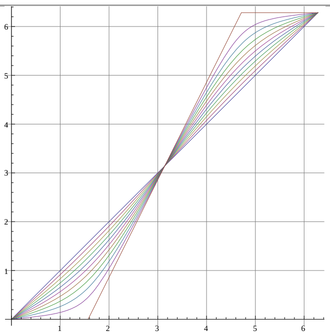
Unghiul α mai poate fi exprimat/obţinut şi prin relaţiile din **MC**

$$(8') \quad \begin{cases} \alpha = \arcsin[sex\theta] = \arcsin\{\sin[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} \\ \alpha = \arccos[cex\theta] = \arccos\{\cos[\theta - \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]]\} \\ \alpha = \arctan[tex\theta] = arctan\frac{sex\theta}{cex\theta} \end{cases}$$

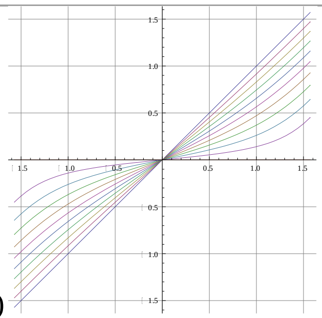
Cele patru variante de exprimare a unghiului α(θ), din relaţiile (8) şi (8'), sunt toate corecte, dar se evidenţiază superioritatea utilizării **FSM-CE** în acest scop, deoarece numai prin relaţia (8), a **FSM-CE** amplitudine excentrică **aexθ**, de variabilă excentrică, unghiul poate fi exprimat corect, în întreg domeniul, de la zero la 2π, aşa cum se poate deduce din figura **6,a**. Celelalte expresii, care utilizează **FCC,** pot

Plot[Evaluate[Table[{t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]}, {s,0,10}], {t, 0, 2 Pi}]

Plot[Evaluate[Table[{ArcTan[Sin[t-ArcSin[0.1s Sin[t]] /Cos[t-ArcSin[0.1sSin[t]]]]},{s,0,10}],{t,-Pi/2,Pi/2}]



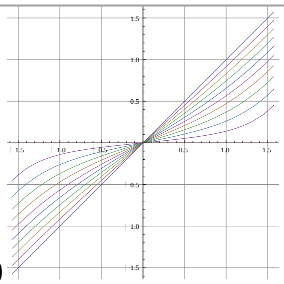
a)



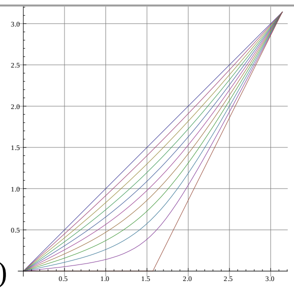
b)

Plot[Evaluate[Table[{ArcSin[Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]]}, {s,0,10}],{t,-Pi/2, Pi/2}]]

Plot[Evaluate[Table[{ArcCos[Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]]},{s,0,10}],{t,0,Pi}]



c)

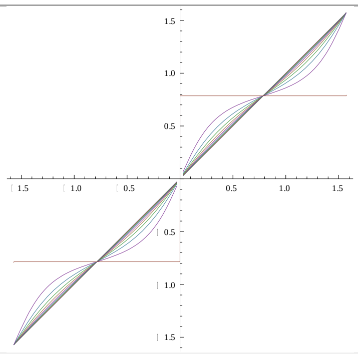


d)

Fig. **6** Graficele comparative ale funcţiei **α**(θ) exprimate prin relatiile (8) şi (8')

Plot[Evaluate[Table[{ArcTan[(Sin[t]/Sqrt[1-(0.1 s Cos[t])^2])/(Cos[t]/Sqrt[1-(0.1 s Sin[t])^2])]}, {s,0,10}], {t,-Pi/2, P/2i}]]

Plot[Evaluate[Table[{ArcTan[(Sin[t]/Sqrt[1+(0.1 s Cos[t])^2])/(Cos[t]/Sqrt[1+(0.1 s Sin[t])^2])]}, {s,0,10}], {t, -Pi/2 , Pi/2}]]????



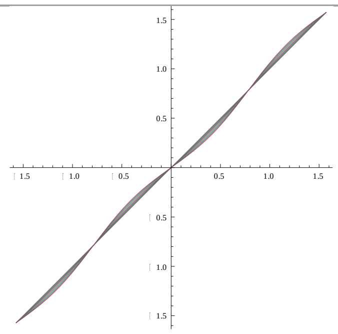


Fig.**7** Unghiurile de poziţie pe cerc ale punctelor generatoare ale funcţiilor cvadrilobe $\boldsymbol{\alpha_q}$(θ), ◄ şi cvazicvadrilobe $\boldsymbol{\alpha_{qq}}$(θ), ►

exprima corect variaţia acestui unghi doar în domeniile de definiţie al acestor funcţii, care sunt **θ** ∈ [-π/2, + π/2] pentru arctan→Fig.**6,b** şi arcsin→ Fig.**6,c** şi **θ** ∈ [0, π] pentru arccos→Fig.**6,d**.

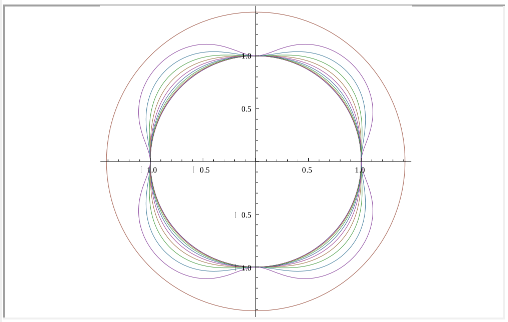
Faţă de punctul **P**(1, θ), punctele generatoare ale **FQL** interne sunt defazate în minus şi cele exterioare **FQQL** sunt defazate în plus/avans (Fig.**1,b** şi Fig.**6**).

Din păcate nu s-a gasit, **încă**, şi pentru cvadrilobe, o relaţie asemănătoare relaţiei (8), aşa că s-a recurs la clasicele **FCC**, cu ajutorul cărora s-au ridicat graficele din figura **7**.

3. RAZELE POLARE ALE CVADRILOBELOR (QL) ŞI ALE CVAZICVADRILOBELOR (QQL)

Ca oricare altă rază polară şi acestea se obţin prin însumarea vectorială a proiecţiilor razei pe cele două axe ale reperului cartezian drept, adică

PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1-0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1-0.01s^2Sin[t]^2}}$},{s,0,10}],{t,0,2 Pi}]]



PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1+0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1+0.01s^2Sin[t]^2}}$},{s,0,10}],{t,0,2 Pi}]]

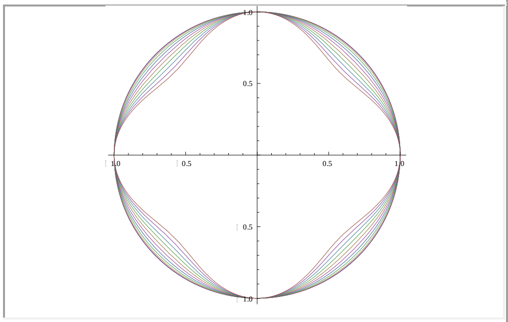
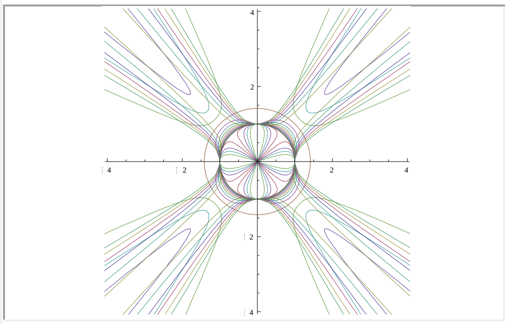


Fig.**8,a** Razele polare ale cvadrilobelor◄ şi ale cvazicvadrilobelor ►

PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1-0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1-0.01s^2Sin[t]^2}}$},{s,0,20}],{t,0,2 Pi}]]



PolarPlot[Evaluate[Table[{ $\sqrt{\frac{Sin[t]^2}{1+0.01s^2Cos[t]^2}+\frac{Cos[t]^2}{1+0.01s^2Sin[t]^2}}$},{s,0,30}],{t,0,2 Pi}]]

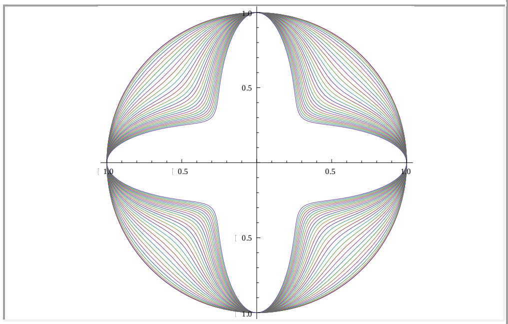


Fig.**8,b** Razele polare ale cvadrilobelor◄ pentru s ∈ [0, 2]
şi ale cvazicvadrilobelor ► pentru s ∈ [0, 3]

$$(8)\qquad \begin{cases} r_{ql} = \sqrt{coq^2\theta + siq^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2 t}{1-s^2 cos^2 t} + \frac{cos^2 t}{1-s^2 sin^2 t}} \\ r_{qql} = \sqrt{qcoq^2\theta + qsiq^2\theta} = \sqrt{\frac{sin^2 t}{1+s^2 cos^2 t} + \frac{cos^2 t}{1+s^2 sin^2 t}} \end{cases}$$

cu graficele, în coordonate polare centrice, din figura **8,a,** pentru cele două tipuri de cvadrilobe, de excentricitatea numerică sbunitară şi, în figura **8,b** şi pentru excentricităţi liniare spraunitare.

4. TRILOBELE CONVEXE ALE CERCULUI UNITATE

Trilobele sunt curbe plane închise, cu 3 lobi, care pentru excentricitatea numerică liniară **s** = 0 reprezintă un **cerc** iar, pentru s = ± 1, reprezintă un **triunghi isoscel perfect** (Fig.**9**),

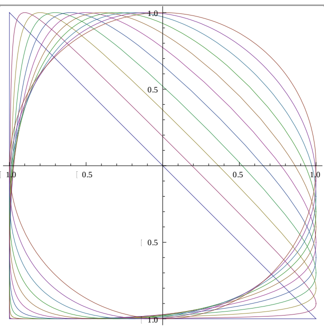
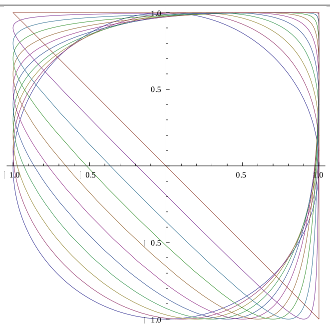
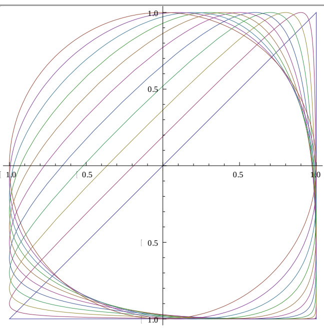
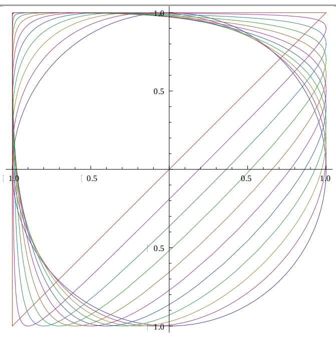
◄S(s ∈[-1,0], ε = 0)	S(s ∈[0, 1], ε = 0)►
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]],Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}, {s,-10,0}], {t,0,2 Pi}]]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]],Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}, {s,0,10}], {t,0,2 Pi}]]
 a)	 b)
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t+Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t+Pi/2]]]}, {s, -10, 0}]], {t, 0, 2 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t+Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t+Pi/2]]]}, {s, 0, 10}]], {t, 0, 2 Pi}]
 c)	 d)

Fig. **9,a** Trilobe

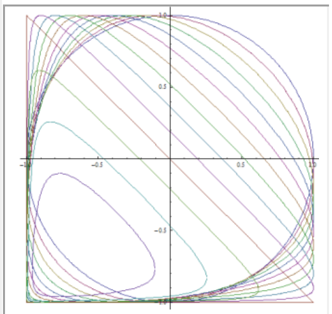
Ecuaţiile parametrice, de definiţie ale trilobelor, sunt exprimate de **FSM-CE** cosinus excentric de variabilă excentrică θ prin următoarele relaţii

$$(10)\qquad \begin{cases} x = cex[\theta, S(s,\varepsilon)] = cex\theta = \cos\,[\theta - \arcsin[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)]] \\ y = cex\left[\theta \pm \frac{\pi}{2}, S(s,\varepsilon)\right] = cex\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \cos\,[\theta \pm \pi/2 - \arcsin[s.\sin\,(\theta \pm \pi/2 - \varepsilon)]] \end{cases}$$

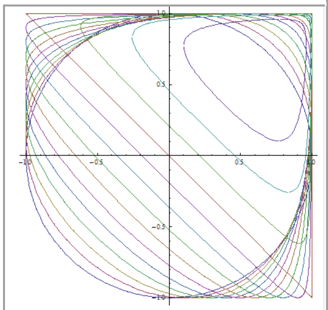
ParametricPlot[Evaluate[Table[{ Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos [t+Pi/2 + ArcSin[0.1 s Sin[t + Pi/2]]]}, {s, 0, 20}], {t, 0, 2 Pi}]]

ParametricPlot3D[{Cos[t-ArcSin [0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2-ArcSin [0.1 s Sin[t-Pi/2]]], 0.1 s}, {s, -20, 20}, {t, 0, 2 Pi}]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{ Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos [t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}, {s, 0, 20}], {t, 0, 2 Pi}]]

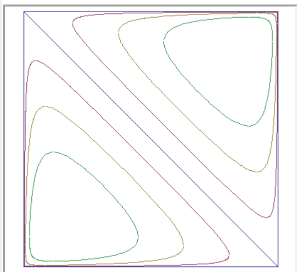

a)

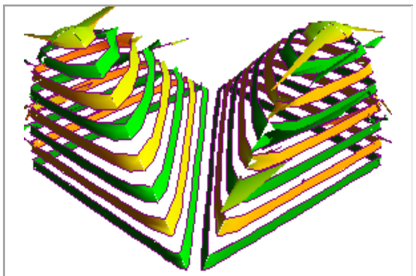

b)


c)

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]], {Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2+ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}}},{s,10,20}],{t,0,2 Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]],- Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]],{Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]],- Cos[t-Pi/2+ ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}}},{s,10,20}],{t,0,2 Pi}]


d)


e)

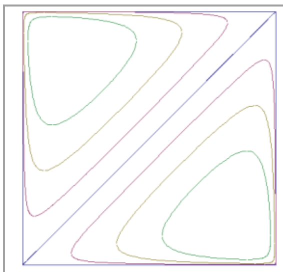

f)

Fig. **9.b** Extratrilobe cu **s** ∊ [-2, +2] lateral

www.SuperMathematica.com www.SuperMatematica.Ro

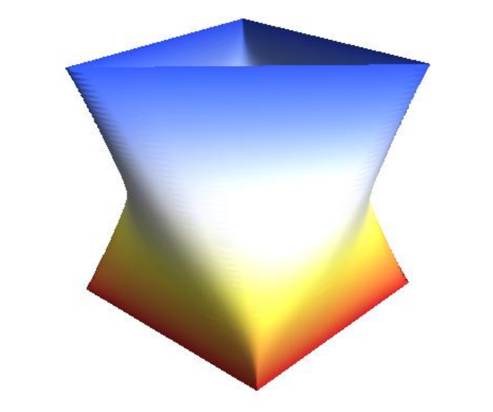
În cercul unitate, cele două laturi congruente/egale ale triunghiului isoscel au valoarea $L_{1,2}$ = 2, iar latura de baza L_3 este diagonala patratului de $L_{\square}$ = 2, adică, L_3 = $2\sqrt{2}$. Pentru θ **–** $\frac{\pi}{2}$ din relaţiile de definiţie (10), diagonala L_3 se obţine pe direcţia NV-SE (Fig.**9,a** şi Fig. **9,b**), iar pentru θ + $\frac{\pi}{2}$ diagonala L_3 se va obţine pe direcţia NE-SV (Fig. **9,c** şi Fig.**9,d**).

Pentru excentricitaţi numerice supraunitare (Fig. **9,b**) se obţin triunghiuri cu laturi rotunjite, care vor fi denumite **extratrilobe**.

Prin utilizarea funcţiilor trilobe, se pot obţine transformări continue ale cercului într-un triunghi sau, în 3D, se poate obţine un cilindru circular-triunghiular, adică, circular la o extremitate şi triunghiular la celălat capăt, aşa cum se poate observa în figura **9,c**.

ParametricPlot3D[{{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]],1-0.1 s}, {Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2+ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]], 1+0.1 s}}, {s,0,10}, {t,0,2 Pi}]

ParametricPlot3D[{{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]],1-0.1 s},{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Cos[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]], 1+0.1 s}}, {s,0,10}, {t,0,2 Pi}]



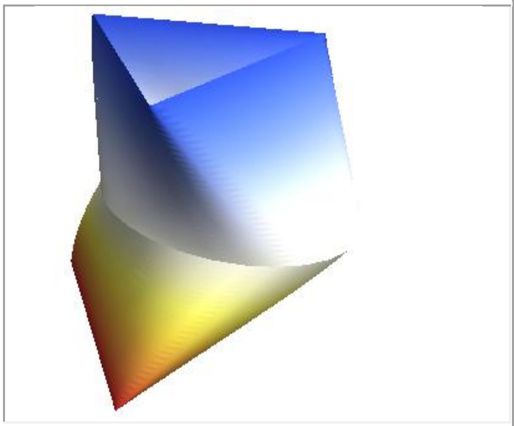


Fig. **9,c** Transformarea continuă a cercului în triunghi isoscel şi invers

www.SuperMathematica.com

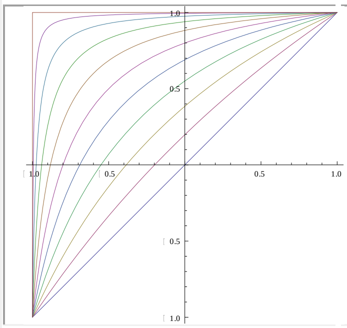
www.SuperMatematica.Ro

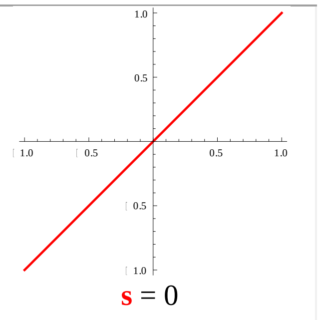
Pentru excentricităţi numerice de semne contrare în ecuaţiile parametrice ale funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) cexθ,

$$(11)\qquad \begin{cases} x = cex[\theta, S(s,\varepsilon)] = cex\theta = \cos\,[\theta \mp \arcsin[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)]] \\ y = \pm\, cex[\theta\,, S(\pm\, s,\varepsilon)] = \pm\cos\,[\theta \pm \arcsin[s.\sin\,(\theta - \varepsilon)]] \end{cases}$$

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[-0.1s Sin[t]]], Cos[t-ArcSin[0.1sSin[t]]]},{s,0,10}], {t, 0, Pi}]]

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[0.1s Sin[t]]], Cos[t-ArcSin[-0.1 s Sin[t]]]}, {s,0,10}], {t, 0, Pi}]]





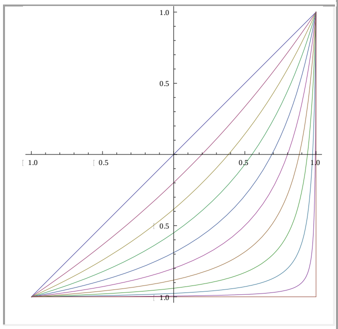


Fig.**10,a** Pseudotrilobe
De la dioagonala pătratuli (s = 0) la două laturi ale lui (s = 1)

se obţine o transformare continuă a diagonalei unui pătrat în două dintre laturile sale, aşa cum se poate observa în figurile **10,a** şi **10,b**.

Orientarea diagonalelor, pentru s = 0, depinde de semnul lui y din relaţia (11): SV-NE pentru semnul plus şi NV-SE pentru semnul minus.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], -Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]]},{s,-10,0}]], {t,0,Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Cos[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], -Cos[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]]},{ s,0,10}]], {t,0,Pi}]

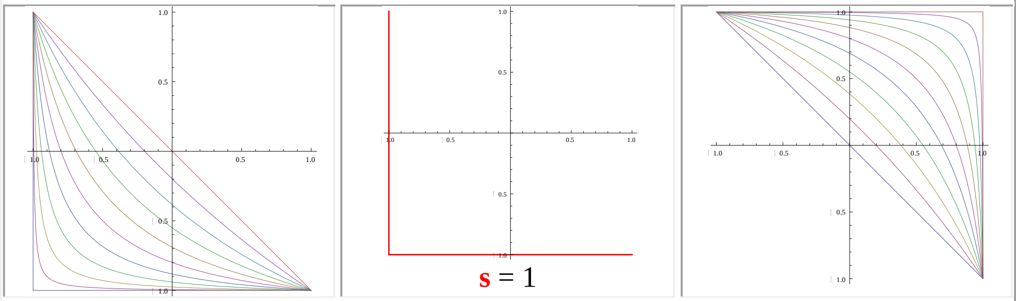


Fig.**10,b** Pseudotrilobe
De la dioagonala pătratuli (s = 0) la două laturi ale lui (s = 1)

5. TRILOBELE CONCAVE ALE CERCULUI UNITATE

Prin înlocuirea funcţiilor supermatematice circulare excentrice (**FSM-CE**) cexθ cu **FSM-CE sex**θ, în ecuaţiile parametrice (11), se obţin **trilobele concave**, de ecuaţii

$$(12)\qquad \begin{cases} x = sex[\theta, S(s,\varepsilon)] = sex\theta = \sin\left[\theta \mp \arcsin[s.\sin(\theta - \varepsilon)]\right] \\ y = \pm\, sex[\theta \mp \pi/2\, , S(s,\varepsilon)] = \pm\sin\left[\theta \mp \pi/2 \pm \arcsin[s.\sin(\theta \mp \pi/2 - \varepsilon)]\right] \end{cases}$$

prezentate în figura11.

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], -Sin[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}, {s,-10,0}]],{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], -Sin[t-Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t-Pi/2]]]}, {s,0,10}]], {t,0,2 Pi}]

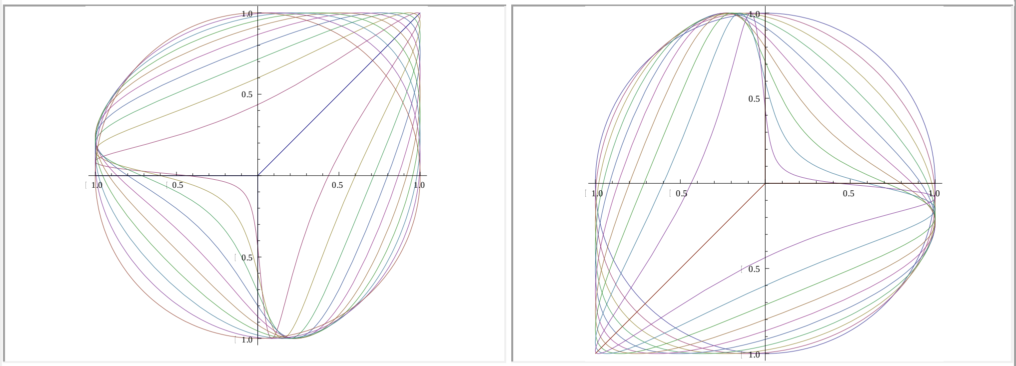


Fig.**11,a** Trilobe concave cu “săgeata” spre NE ◄ şi SV ►

Direcţia semidiagonalei, numita aici şi “săgeată” , datorită formei trilobei de s = 0,9, depinde de semnul lui y din relaţiile (11). Pentru y < 0 şi argumentul $\theta - \pi/2$ orientarea este pe direcţia primei bisectoare (Fig. 11,a), iar pentru y > 0 şi argumentul $\theta + \pi/2$, orientarea este pe direcţia celei de a doua bisectoare.

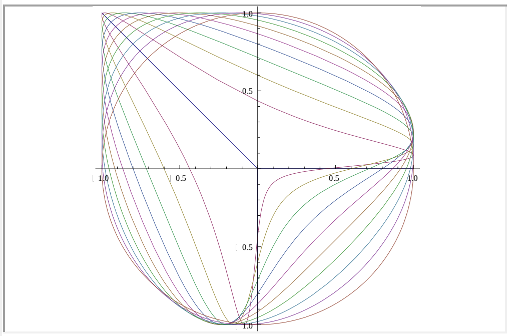
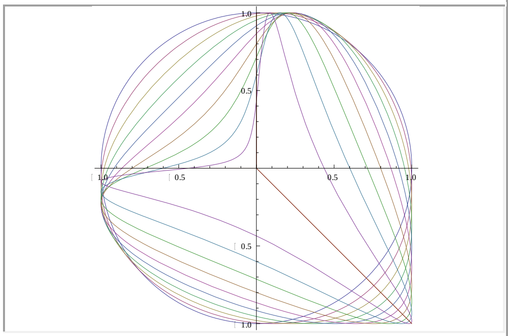
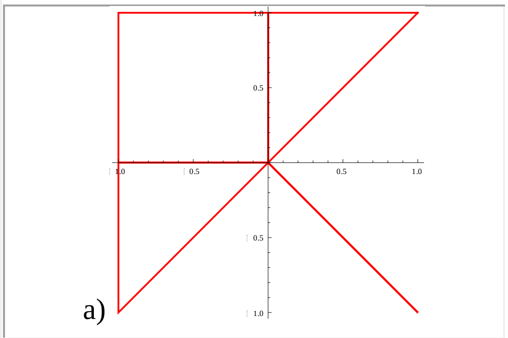
ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t+Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t+Pi/2]]]}, {s,-10,0}]],{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t+Pi/2-ArcSin[0.1 s Sin[t+Pi/2]]]}, {s,0,10}]],{t,0,2 Pi}]
	

Fig.**11,b** Trilobe concave cu “săgeata” spre NV ◄ şi SE ►

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

6. TRIUNGHIURI DREPTUNGHICE ISOSCELE CONCAVE

Trilobele concave scot în evidenţă existenţa unor **triunghiuri concave**, necunoscute în literatura matematică, care se obţin din ecuaţiile (11) pentru excentricitate liniară s = ± 1.



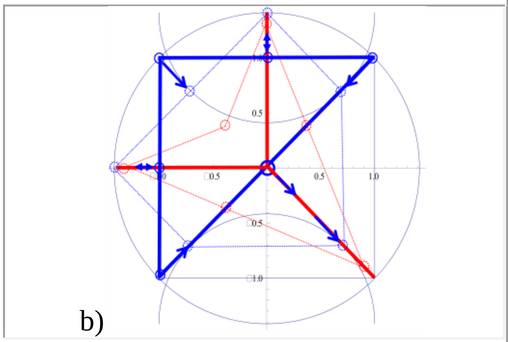


Fig. 12 Transformarea trilobei convexe de s = 1(un triunghi isoscel)
într-o trilobă concavă de s = 1 (**triunghi dreptunghic isoscel concav**).

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

Problema este dacă aceaste figuri, denumite **triunghiuri dreptunghice isoscele concave**, obţinute pentru s = ± 1, pot fi denumite triunghiuri ?

Aceste figuri plane au **trei laturi**, dintre care două sunt egale între ele şi egale cu unitatea

(13) $L_1 = L_2 = 1$,

de unde provine denumirea de **isoscel**, orientate pe direcţia axelor reperului/sistemului de coordonate carteziene drepte xOy, iar a treia “latură” este egală cu suma pătratelor celorlalte două, adică o relaţie arhicunoscută dintr-un triunghi dreptunghic, conform celei mai cunoscute şi mai demonstrate (370 de demonstraţii !) teoreme din geometria plană, denumită teorema lui **Pitagora**, adică

(14) $$L_3 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{2}$$

Aşa cum se observă în figura **12,b**, în care se indică modul de transformare a triunghiurilor prin două faze intermediare, rezultă că, în final, toate laturile triunghiului dreptunghic isoscel convex se înjumătăţesc, în momentul în care el se transformă într-un triunghi dreptunghic isoscel concav. În acest moment, între cele trei laturi se formează trei unghiuri în jurul originii O(0, 0), dintre care unul este de măs(⊾ A) = $\frac{\pi}{2}$, între L_1 şi L_2, aceeaşi ca şi în triunghiul dreptunghic isoscel convex, de unde provine denumirea de **dreptunghic**, iar două unghiuri sunt de câte o măs(∢ B) = măs (∢ C) = $3\frac{\pi}{4}$, între L_1, L_2 şi L_3, astfel că suma lor este

(15) $$\text{măs}(⊾ A) + \text{măs}(∢ B) + \text{măs}(∢ C) = \frac{\pi}{2} + 2 * 3\frac{\pi}{4} = \pi.$$

Rezultă că suma celor 3 unghiuri este de π, aceeaşi ca în oricare triunghi clasic şi unghiul din A are aceeaşi măsură de $\frac{\pi}{2}$ în ambele triunghiuri.

În concluzie, se poate afirma cu temei, că această nouă figură geometrică poate fi denumită **triunghi dreptunghic isoscel concav** al cărui ecuaţii parametrice sunt

(16) $$\begin{cases} x = sex[\theta, S(s = \pm 1, \varepsilon)] = sex\theta = \sin[\theta \mp \arcsin[\sin(\theta - \varepsilon)]] \\ y = \pm\, sex[\theta \mp \pi/2, S(s = \pm 1, \varepsilon)] = \pm\sin[\theta \mp \pi/2 \pm \arcsin[\sin(\theta \mp \pi/2 - \varepsilon)]] \end{cases}$$

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]}, {s,-10,0}]], {t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{-Sin[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]}, {s,0,10}]], {t,0,2 Pi}]

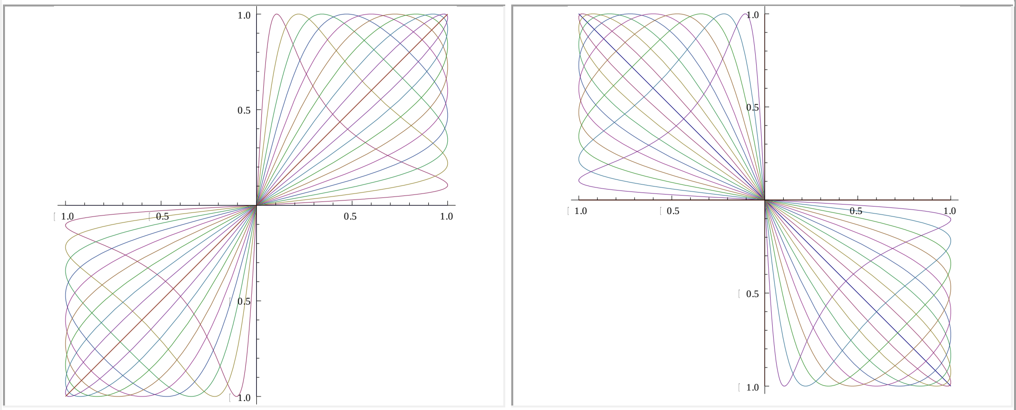


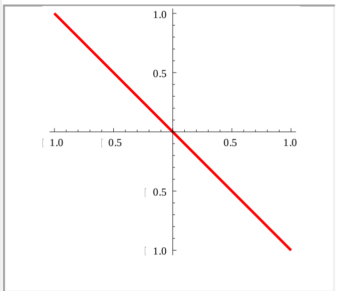
Fig.13,a Cvazitrilobe

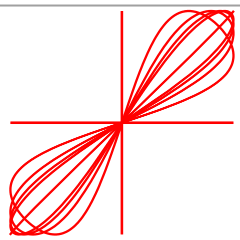
Pentru funcţii de acelaşi argument θ, pentru x şi pentru y în relaţiile (16), se obţin cvazitrilobele cu graficele din figura **13,a**.

La valorile s = 0 şi s = 1se obţin dreptele din figura **13,b**, care constitue o transformare a segmentului de bisectoare în cele două segmente ale axe de coordonate ale sistemului cartezian drept x şi y.

Pentru valori supraunitare ale excentricitaţii numerice s se obţin cvazitrilobele cu graficele artistice din figura 14.

s = 0	**s = 1**





Succesiunea transformării

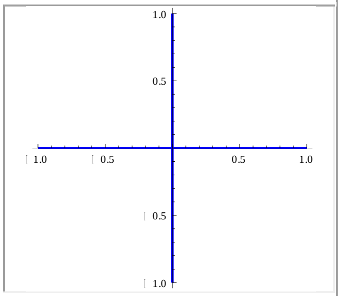
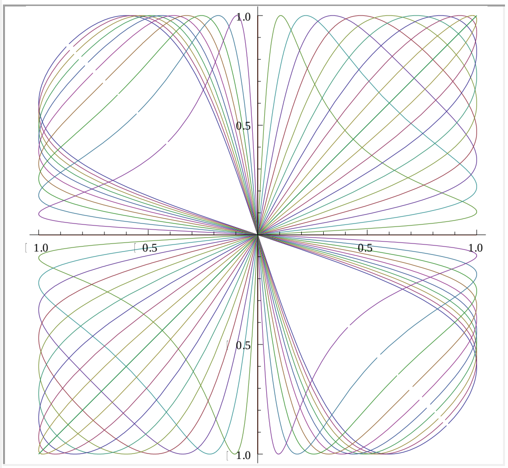


Fig.13,b Transformarea bisectoarei în axele de coordonate ca extreme ale cvazitrilobelor

ParametricPlot[Evaluate[Table[{Sin[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]}, {s,-20,0}]],{t,0,2 Pi}]	ParametricPlot[Evaluate[Table[{-Sin[t+ArcSin[0.1 s Sin[t]]], Sin[t-ArcSin[0.1 s Sin[t]]]}, {s,0,20}]],{t,0,2 Pi}]



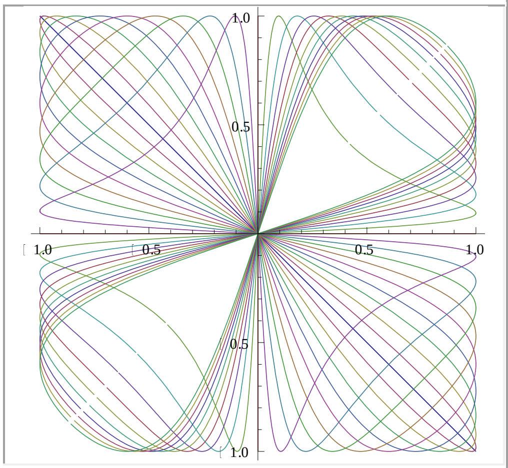


Fig.14 Cvazitrilobe de excentricitate numerică supraunitară

www.SuperMathematica.com	www.SuperMatematica.Ro

7. BIBLIOGRAFIE

1	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conferinţă Naţională de Vibraţii în Construcţia de Maşini , Timişoara , 1978, pag.101...108.
2	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE şi EXTENSIA LOR.	Bul .Şt.şi Tehn. al I.P. ”TV” Timişoara, Seria Mecanică, Tomul 25(39), Fasc. 1-1980, pag. 189...196

3	Şelariu Mircea Eugen	STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE ale UNUI SISTEM NELINIAR, CONSERVATIV cu AJUTORUL FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com. I Conf. Naţ. Vibr.în C.M. Timişoara,1978, pag. 95…100
4	Şelariu Mircea Eugen	APLICAŢII TEHNICE ale FUNCŢIILOR CIRCULARE EXCENTRICE	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 142…150 A V-a
5	Şelariu Mircea Eugen	THE DEFINITION of the ELLIPTIC ECCENTRIC with FIXED ECCENTER	Conf. Naţ. De Vibr. In Constr. De Maşini,Timişoara, 1985, pag.175…182
6	Şelariu Mircea Eugen	ELLIPTIC ECCENTRICS with MOBILE ECCENTER	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 183…188
7	Şelariu Mircea Eugen	CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLICS ECCENTRICS	Com. A V-a Conf. Naţ. V. C. M. Timişoara, 1985, pag. 189…194.
8	Şelariu Mircea Eugen	ECCENTRIC LISSAJOUS FIGURES	Com.a IV-a Conf. PUPR, Timişoara, 1981, Vol.1. pag. 195…202
9	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE cex şi sex- SOLUŢIILE UNOR SISTEME MECANICE NELINIARE	Com. A VII-a Conf.Nat. V.C.M., Timişoara,1993, pag. 275…284.
10	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA**	Com.VII Conf. Internaţ. De Ing. Manag. Si Tehn.,TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9 : Matematicπ Aplicată,. Pag.41…64
11	Şelariu Mircea Eugen	FORMA TRIGONOMETRICĂ a SUMEI şi a DIFERENŢEI NUMERELOR COMPLEXE	Com.VII Conf. Internat. De Ing. Manag. Si Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995, Vol. 9 : Matematică Aplicată, pag. 65…72
12	Şelariu Mircea Eugen	MIŞCAREA CIRCULARĂ EXCENTRICĂ	Com.VII Conf. Internaţ. De Ing. Manag. Si Tehn. TEHNO'95., Timişoara, 1995 Vol.7 : Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind.,pag. 85…102
13	Şelariu Mircea Eugen	RIGIDITATEA DINAMICĂ EXPRIMATĂ CU FUNCŢII SUPERMATEMATICE	Com.VII Conf. Internaţ. De Ing. Manag. Si Tehn., TEHNO'95 Timişoara, 1995 Vol.7 : Mecatronică, Dispoz. Si Rob.Ind., pag. 185…194
14	Şelariu Mircea Eugen	DETERMINAREA ORICÂT DE EXACTĂ A RELAŢIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA ÎNTÂIA **K(k)**	Bul. VIII-a Conf. De Vibr. Mec., Timişoara,1996, Vol III, pag.15 … 24
15	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILĂ CENTRICĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţă de inginerie menagerială şi tehnologică , Timişoara 1998, pag 531..548
16	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢII DE TRANZIŢIE INFORMAŢIONALĂ	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţă de inginerie menagerială şi tehnologică , Timişoara 1998, pag 549… 556

17	Şelariu Mircea Eugen	FUNCŢIILE SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE DE VARIABILA CENTRICA CA SOLUŢII ALE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE	TEHNO ' 98. A VIII-a Conferinţă de inginerie menagerială şi tehnologică , Timişoara 1998, pag 557…572
18	Şelariu Mircea Eugen	INTRODUCEREA STRÂMBEI ÎN MATEMATICĂ	Lucr. Simp. Naţional "Zilele Universităţii Gh. Anghel" Ed. II-a, Drobeta Turnu Severin, 16-17 mai 2003, pag. 171 … 178
19	Şelariu Mircea Eugen	QUADRILOBIC VIBRATION SYSTEMS	The 11 –th International Conference on Vibration Engineering, Timişoara, Sept. 27-30, 2005 pag. 77 … 82
20	Şelariu Mircea Eugen	SMARANDACHE STEPPED FUNCTIONS	International Journal "Scientia Magna" Vol.3, Nr.1, 2007 , ISSN 1556-6706
21	Şelariu Mircea Eugen	TEHNO-ART OF ŞELARIU SUPERMATHEMATICS FUNCTIONS	(ISBN-10):1-59973-037-5 (ISBN-13):974-1-59973-037-0 (EAN): 9781599730370
22	Şelariu Mircea Eugen	PROIECTAREA DISPOZITIVELOR DE PRELUCRARE, Cap. 17 din PROIECTAREA DISPOZITIVELOR	Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982, pag. 474 … 543
23	Şelariu Mircea Eugen	**SUPERMATEMATICA. FUNDAMENTE**	Editura "POLITEHNICA" , Timişoara, 2007
24	Petrişor Emilia	ON THE DYNAMICS OF THE DEFORMED STANDARD MAP	Workshop Dynamicas Days'94, Budapest, şi Analele Univ.din Timişoara, Vol.XXXIII, Fasc.1-1995, Seria Mat.-Inf.,pag. 91…105
25	Petrişor Emilia	SISTEME DINAMICE HAOTICE	Seria Monografii matematice, Tipografia Univ. de Vest din Timişoara, 1992
26	Petrişor Emilia	RECONECTION SCENARIOS AND THE THRESHOLD OF RECONNECTION IN THE DYNAMICS OF NONTWIST MAPS	Chaos, Solitons and Fractals, 14 (2002) 117-127
27	Petrişor Emilia	NON TWIST AREA PRESERVING MAPS WITH REVERSING SYMMETRY GROUP	International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.11, no 2(2001) 497-511
28	Cioara Romeo	FORME CLASICE PENTRU FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE	Proceedings of the Scientific Communications Meetings of "Aurel Vlaicu" University, Third Edition, Arad, 1996, pg.61 …65
29	Preda Horea	REPREZENTAREA ASISTATĂ A TRAIECTORILOR ÎN PLANUL FAZELOR A VIBRAŢIILOR NELINIARE	Com. VI-a Conf.Naţ.Vibr. în C.M. Timişoara, 1993, pag.
		APLICAREA FUNCŢIILOR	Com.VII-a Conf. Internat.de Ing. Manag. Şi

30	Filipescu Avram	EXCENTRICE PSEUDOHIPERBOLICE (ExPH) ÎN TEHNICĂ	Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică aplicată, pag. 181 … 185
31	Dragomir Lucian	UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE IN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I-a: REPREZENTARE ÎN 2D	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. Şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică aplicată, pag. 83 … 90
32	Şelariu Şerban	UTILIZAREA FUNCŢIILOR SUPERMATEMATICE IN CAD / CAM : SM-CAD / CAM. Nota I I –a: REPREZENTARE ÎN 3D	Com.VII-a Conf. Internaţ.de Ing. Manag. Şi Tehn. TEHNO'95, Timişoara, Vol. 9. Matematică aplicată., pag. 91 … 96
33	Staicu Florenţiu	DISPOZITIVE UNIVERSALE de PRELUCRARE a SUPRAFEŢELOR COMPLEXE de TIPUL EXCENTRICELOR ELIPTICE	Com. Ses. Anuale de com.şt. Oradea ,1994
34	George LeMac	THE ECCENTRIC TRIGONOMETRIC FUNCTIONS: AN EXTENTION OF CLASSICAL TRIGONOMETRIC FUNCTIONS.	The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada Depertment of Applied Mathematics May 18, 2001
35	Şelariu Mircea Ajiduah Cristoph Bozântan Emil Filipescu Avram	INTEGRALELE UNOR FUNCŢII SUPERMATEMATICE	Com. VII Conf.Internaţ. de Ing.Manag. şi Tehn. TEHNO'95 Timişoara. 1995,Vol.IX: Matem. Aplic. Pag.73…82
36	Şelariu Mircea Fritz Georg Meszaros A.	ANALIZA CALITĂŢII MIŞCARILOR PROGRAMATE cu FUNCŢII SUPERMATEMATICE	IDEM, Vol.7: Mecatronică, Dispozitive şi Rob.Ind., pag. 163…184
37	Şelariu Mircea Szekely Barna	ALTALANOS SIKMECHANIZMUSOK FORDULATSZAMAINAK ATVITELI FUGGVENYEI MAGASFOKU MATEMATIKAVAL	Bul.Şt al Lucr. Premiate, Universitatea din Budapesta, nov. 1992
38	Şelariu Mircea Popovici Maria	A FELSOFOKU MATEMATIKA ALKALMAZASAI	Bul.Şt al Lucr. Premiate, Universitatea din Budapesta, nov. 1994
39	Smarandache Florentin Şelariu Mircea Eugen	IMMEDIATE CALCULATION OF SOME POISSON TYPE INTEGRALS USING SUPERMATHEMATICS CIRCULAR EX-CENTRIC	arXiv:0706.4238, 2007

		FUNCTIONS	
40	Konig Mariana Şelariu Mircea	PROGRAMAREA MIŞCARII DE CONTURARE A ROBOŢILOR INDUSTRIALI cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE	MEROTEHNICA, Al V-lea Simp. Naţ.de Rob.Ind.cu Part .Internaţ. Bucuresti, 1985 pag.419…425
41	Konig Mariana Şelariu Mircea	PROGRAMAREA MIŞCĂRII de CONTURARE ale R. I. cu AJUTORUL FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE CIRCULARE EXCENTRICE	Merotehnica, V-lea Simp. Naţ.de RI cu participare internatională, Buc.,1985, pag. 419 … 425.
42	Konig Mariana Şelariu Mircea	THE STUDY OF THE UNIVERSAL PLUNGER IN CONSOLE USING THE ECCENTRIC CIRCULAR FUNCTIONS	Com. V-a Conf. PUPR, Timişoara, 1986, pag.37…42
43	Staicu Florentiu Şelariu Mircea	CICLOIDELE EXPRIMATE CU AJUTORUL FUNCŢIEI SUPERMATEMATICE rexθ	Com. VII Conf. Internatională de Ing.Manag. şi Tehn ,Timişoara “TEHNO’95”pag.195-204
44	Gheorghiu Em. Octav Şelariu Mircea Bozântan Emil	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE DE SUMĂ DE ARCE	Ses.de com.şt.stud.,Secţia Matematică,Timişoara, Premiul II la Secţia Matematică, 1983
45	Gheorghiu Emilian Octav Şelariu Mircea Cojerean Ovidiu	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE. DEFINIŢII, PROPRIETẮŢI, APLICAŢII TEHNICE.	Ses. De com. Şt.stud. Secţia Matematică, premiul II la Secţia Matematică, pe anul 1985.
46	Şelariu Mircea Eugen, Bălă Dumitru	WAYS OF PRESENTING THE DELTA FUNCTION AND AMPLITUDE FUNCTION **JACOBI**	Proceedings of the2nd World Congress on Science, Economics and Culture, 25-29 August 2008 New York, paper published in Denbridge Journals, p.42 … 55
47	Dumitru Bălă	SUPERMATHEMATICAL – ŞELARIU FUNCTIONS BETA ECCENTRIC bexθ SOLUTIONS OF SOME OSCILATORY NON-LINIAR SYSTEMS (SOβ)	Proceedings of the2nd World Congress on Science, Economics and Culture, 25-29 August 2008 New York, paper published in Denbridge Journals, p.27 … 41