Fast Approximation of π Using Regular Polygon

author: park,jongsoo
e-mail: oofbird7@naver.com

Abstract :고전적 3대 작도 문제 중 지금까지 알려진 가장 오래된 작도 문제이고 가장 늦게 그 작도 불가능성이 증명된 주제가 '원과 면적이 같은 정사각형 또는 그 역의 작도 가능' 문제다. 이 문제는 독일의 유명한 수학자 린데만에 의해서 π가 초월수임이 밝혀짐으로써 일단락되었다. 본 논문은 그리스의 여러 수학자 Antiphon, Bryson, Archimedes 제시한 π의 근사적 해법에 초점을 맞추었다. 이들은 π의 값이 원에 내접 및 외접하는 정다각형 사이의 값이라고 생각했다. 눈금 없는 자와 컴퍼스 만을 이용하여 원에 내접하는 정육각형의 이분할 작도방법에 대해서는 이미 널리 알려진 사실이지만 원에 외접하는 정육각형의 이분할 작도방법에 대해서는 아직까지 알려지지 않았다고 전해진다.[10] 본 논문에서는 이 방법을 시도하였으며 작도가 가능함을 보일 수 있었다.

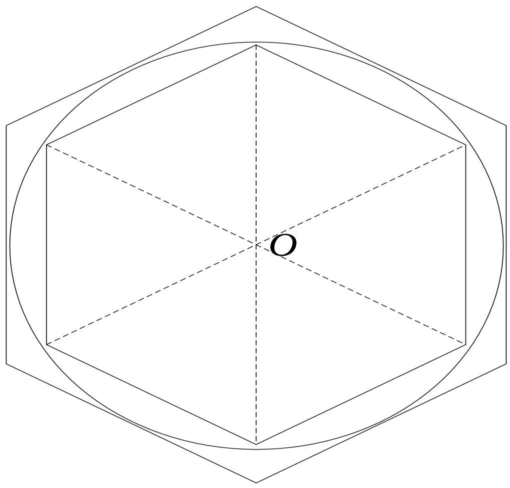
<목차>

1. 고대 그리스의 근사적 해법

- 아낙사고라스(Anaxagoras;499 BC - 428 BC) : 플라톤에 따르면 그가 '원과 면적이 같은 정사각형 작도'의 해법이 있다고 하나, 오늘날 전하지 않는다.
- **안티폰(Antiphon;480 BC - 411 BC)의 해법** : 주어진 원에 내접하는 정사각형을 작도하고, 정사각형에서 8 각형, 16 각형, ... 으로 작도해가다보면 어떤 정다각형에서 원과 같아진다고 여겼다. 이 방법은 동시대인들에게 바로 비판을 받았는데 왜냐하면 원과 다각형이 같다고 내포하고 있으므로 이는 도형의 분류에 대한 기본 전제를 무시하기 때문이었다.

- **브리존(Bryson;450 BC - 390 BC)의 해법** : 주어진 원에 내접하는 정사각형과 외접하는 정사각형의 사이라고 여겼다. 그리고 안티폰의 정다각형의 면적은 원보다 작을 수밖에 없으니 주어진 원에 외접하는 정다각형을 작도하면 그 사이 값이라고 주장했다. 그러나 '그 사이'를 어떻게 작도하느냐에 대해서는 알려지지 않았다.

- **아르키메데스(Archimedes;287 BC - 212 BC)의 π 연구** : 아르키메데스는 브리존의 사고를 발전시켜 원의 둘레와 지름과의 관계에 대한 정리를 이끌어낸다. 그는 6 각형으로 시작해서 96 각형까지의 다각형의 내접원과 외접원을 연구하여 얻었다. 아르키메데스의 저서 '원의 측정'에 따라, 그 정리를 현대적 용어로 바꾸면



-

$P - 3d < \frac{1}{7}d$ 이고 $P - 3d > \frac{10}{71}d$ 이다. 따라서 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

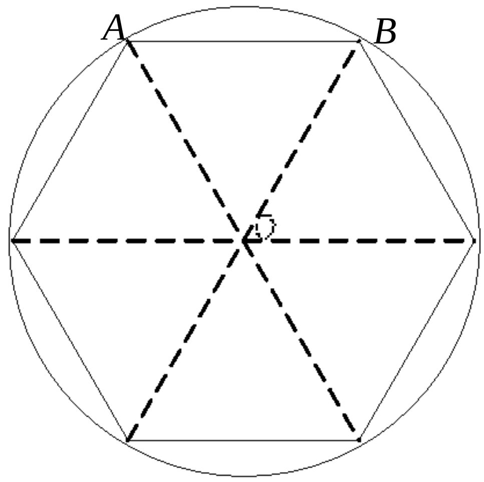
- **프톨레미우스(Ptolemy;AD 85 - 165) 의 π 연구** : 별들의 관계를 기하학적 관계와 그 운동으로 연구한 유명한 저서 '8 권으로 된 천문학의 위대한 수학적 구성'(아랍화 된 제목 '알마게스트'로 더 잘 알려졌다) 에 60 진법으로 π 값을 밝혔다.

$$\pi = 3.8'30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3\frac{17}{120}$$

으로 아르키메데스보다 더 정밀한 값을 냈다.

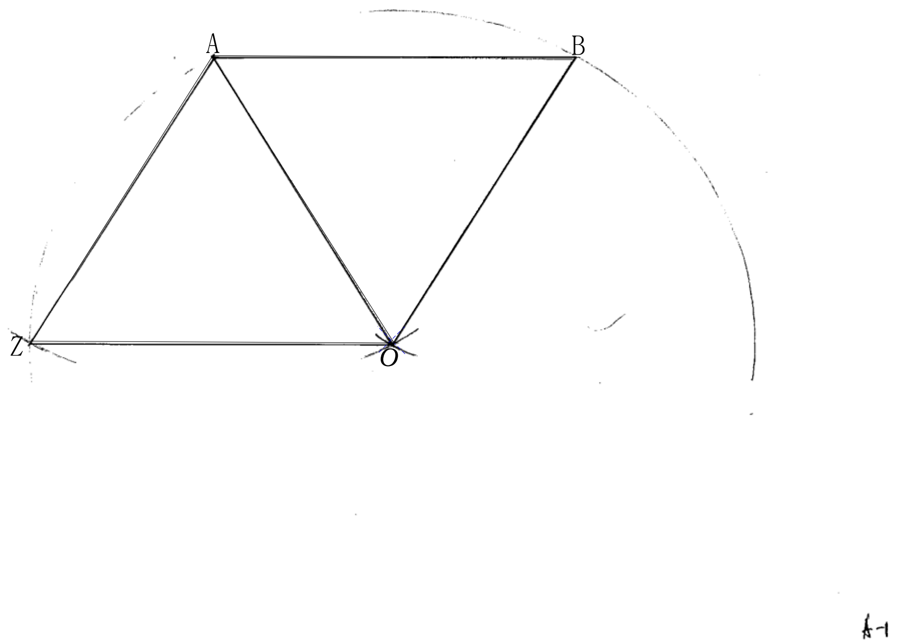
2-A) 원에 내접하는 정육각형의 분할

원에 내접하는 정육각형의 분할하는 방법은 이미 널리 알려져 있다.
본 장에서는 다시 그 과정을 확인해 보고자 한다.



$Figure-1)$

$Figure-1)$ 에서 보이는 것처럼 원에 내접하는 정육각형을 생각해 볼 수 있다.
정육각형은 정삼각형 $\triangle ABO$ 와 같은 삼각형이 총 6개임을 확인 할 수가 있다.



$Figure-2)$

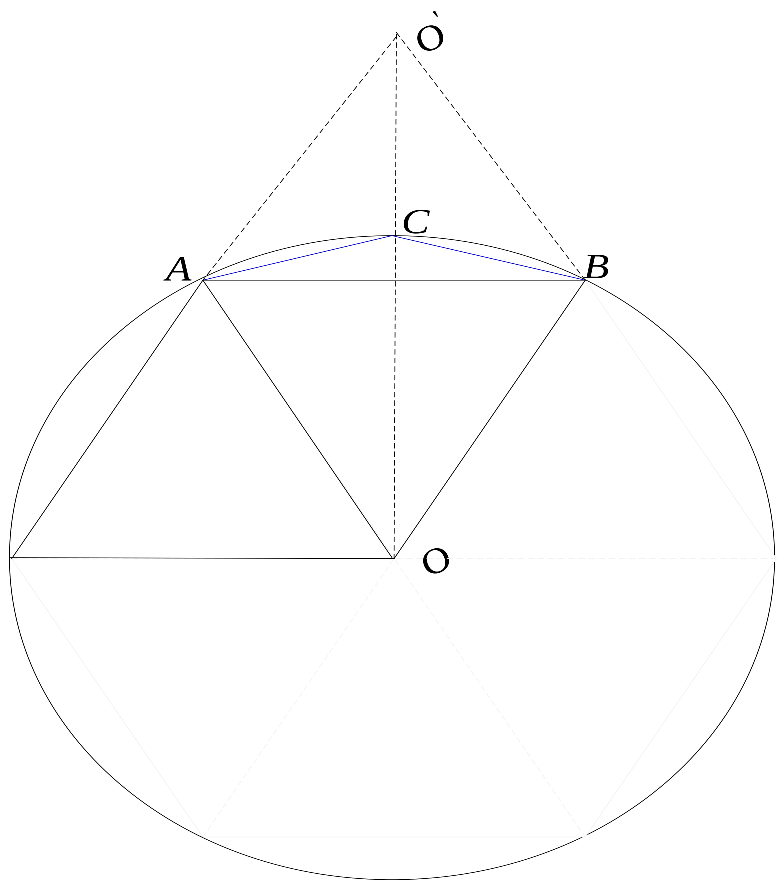
$Figure-2)$ 에서 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 을 생각해 보자. 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 을 작도하기 위해

$i)$ 길이가 r 인 선분 $\overline{AB}$ 을 자를 이용하여 긋는다.
$ii)$ 점 A 을 중심으로 길이가 r 인 원을 그린다.
$iii)$ 점 B 을 중심으로 길이가 r 인 원을 그린다.
$iv)$ 점 A 을 중심인 원과 점 B 을 중심인 원이 만나는 점을 O 라 하자.
$v)$ 이때 점 A, B, O 의 사이를 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 가 만들어 진다.

같은 방법으로 정삼각형 $\triangle\ AOZ$ 을 작도하기 위해서는

$i)$ 점 A 을 중심으로 길이가 r 인 원을 그린다.
$ii)$ 점 O 을 중심으로 길이가 r 인 원을 그린다.
$iii)$ 점 A 을 중심인 원과 점 O 을 중심인 원이 만나는 점을 Z 라 하자.
$iv)$ 이때 점 A, O, Z 의 사이를 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle\ AOZ$ 가 만들어 진다.

이 방식으로 점 O 을 중심으로 길이가 r 인 원을 그리게 되면 원에 내접하는 정육각형을 그릴 수가 있다.



$Figure-3)$

$Figure-3)$ 에서 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 을 생각해 보자. 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 을 정확히 수직 이분할 하기
위해서

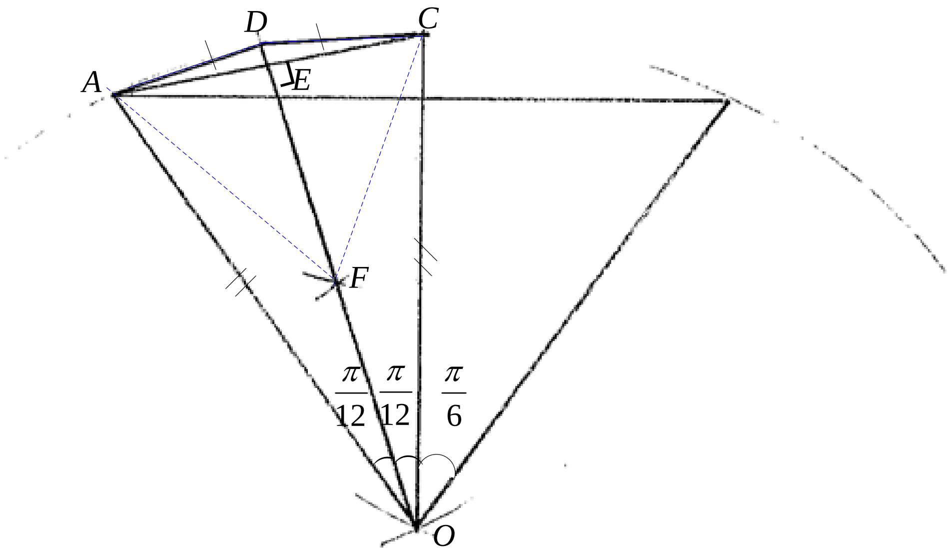
$i)$ 길이가 r 인 선분 $\overline{AB}$ 에서 점 A 을 중심으로 원을 그린다.
$ii)$ 길이가 r 인 선분 $\overline{AB}$ 에서 점 B 을 중심으로 원을 그린다.
$iii)$ 점 A 가 중심인 원과 점 O 가 중심인 원이 만나는 점 O 와 대칭되는 점을 O' 라 하자.
$iv)$ 점 A, B, O' 의 사이를 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle\ ABO'$ 가 만들어 진다.
$v)$ 이때 점 O, O' 을 잇는 직선을 그으면 정삼각형 $\triangle\ ABO$ 을 정확히 수직 이분할된다.

이제 $ACBO$ 을 생각해 보자

$i)$ 원 O 와 선분 $\overline{OO'}$ 이 만나는 점을 C 라 하자.
$ii)$ 이때 이등변 삼각형 $\triangle\ AOC$ 와 $\triangle\ BOC$ 을 생각해 보자.
$iii)$ 선분 $\overline{AO} = \overline{BO}$, 선분 $\overline{OC}$ 가 공통이고, 각 $\angle \mathrm{AOC} = \angle BOC$ 이다.

$iv)$ 이등변 삼각형 $\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 는 합동이다.

$v)$ 따라서 선분 $\overline{AC}$ 와 선분 $\overline{BC}$ 의 길이가 같음을 알 수가 있다.



$Figure-4)$

$Figure-3)$ 에서 이등변삼각형 $\triangle AOC$ 을 생각해 보자. 이등변삼각형 $\triangle AOC$ 을 정확히 2분할 하기 위해서

$i)$ 선분 $\overline{AC}$ 와 수직인 원점 O 을 지나는 직선을 생각할 수 있다.
$ii)$ 선분 $\overline{AC}$ 와 수직이며 원점 O 을 지나는 직선은 단 하나뿐임으로 $\overline{AC}$ 와 수직이며 2등분되는 직선을 찾으려 한다.
$iii)$ 길이가 l 인 선분 $\overline{AC}$ 에서 점 A 을 중심으로 반지름이 l 인 원을 그린다. 이번에는 점 B 을 중심으로 반지름이 l 인 원을 그린다. 이때 두 원이 만나는 점을 F 라 하고, 세 점 A, C, F 을 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle AFC$ 을 얻을 수 있다.

$iv)$ 원점 O 에서 선분 $\overline{AC}$ 와 수직인 직선은 단 하나임으로 점 F 을 지나게 된다.

이제 사각형 $ADCO$ 을 생각해 보자

$i)$ $\overline{OF}$ 을 지나며 원 O 와 만나는 점을 D 라 하자.
$ii)$ 이때 이등변 삼각형 $\triangle AOD$ 와 $\triangle COD$ 을 생각해 보자.

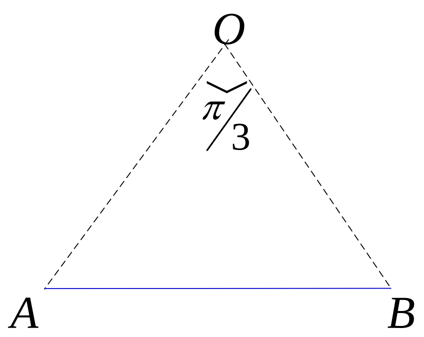
$iii)$ 선분 $\overline{AO} = \overline{CO}$, 선분 $\overline{OD}$ 가 공통이고, 각 $\angle AOD = \angle COD$ 이다.
$iv)$ 이등변 삼각형 $\triangle AOD$ 와 $\triangle COD$ 는 합동이다.

$v)$ 따라서 선분 $\overline{AD}$ 와 선분 $\overline{CD}$ 의 길이가 같음을 알 수가 있다.

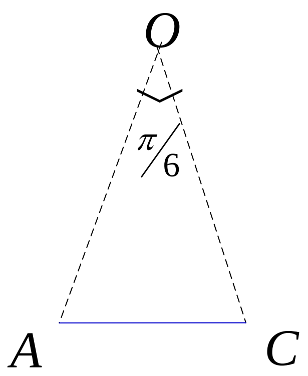
우리는 이러한 방식으로 정육각형을 정십이각형으로, 정십이각형을 정이십사각형으로 계속해서 이분할 할 수 있음을 예상할 수 있다.

2-B) π의 lower bound value

$Figure-3)$ $Figure-4)$ 에서 삼각형의 다음과 같은 특징을 찾을 수가 있다.



$Figure-A)$

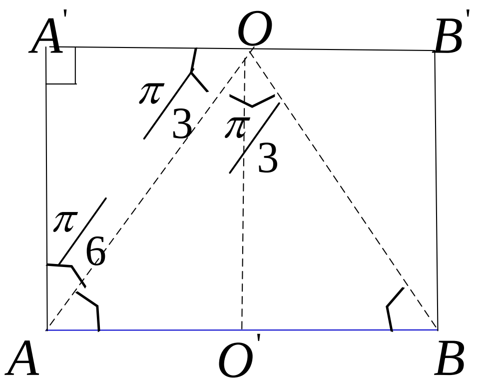


$Figure-B)$

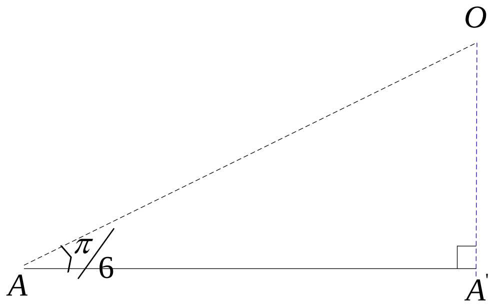
원에 내접하는 정육각형을 이분할 할 경우에

$i)$ $Figure-A)$ 에서 변 $\overline{OA}$ 의 길이는 일정한(여기서는 1) 이등변 삼각형이다.

$ii)$ $Figure-B)$ 변이 분할 될 때 마다 삼각형의 끼인각은 $\frac{1}{2}$ 으로 준다.



$Figure-C)$



$Figure-D)$

$iv)$ 따라서 빗변 $\overline{OA}$ 의 값은 일정하기 때문에 수직인 선의 길이를 구하기 위해서는 $\sin\theta$ 의 값을 구하면 알 수 있다.

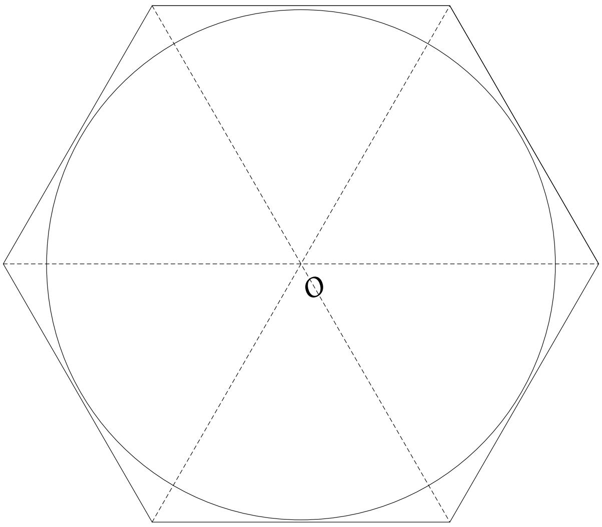
$v)$ $Figure-C)$ 에서 한변의 길이 $\overline{AB}$ 는 $\overline{AB}=2\overline{A'O}$ 임을 알 수가 있다.

$vi)$ $Figure-D)$ 에서 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ 이므로 $\overline{A'O}$ 의 길이는 $\overline{OA'}=\sin\frac{\pi}{6}\times\overline{OA}$ 이다.

차수	도형	한변의 길이	π 의 근사값	
n=1	정육각형	$2\times\sin\frac{\pi}{6}$	$3\times2\times\sin\frac{\pi}{6}$	3
n=2	정십이각형	$2\times\sin\frac{\pi}{12}$	$6\times2\times\sin\frac{\pi}{12}$	3.10582854123
n=3	정이십사각형	$2\times\sin\frac{\pi}{24}$	$12\times2\times\sin\frac{\pi}{24}$	3.13262861328
n=4	정사십팔각형	$2\times\sin\frac{\pi}{48}$	$24\times2\times\sin\frac{\pi}{48}$	3.13935020304
n=5	정구십육각형	$2\times\sin\frac{\pi}{96}$	$48\times2\times\sin\frac{\pi}{96}$	3.14103195089
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n=k	정 $6\times2^{k-1}$ 각형	$2\times\sin\frac{\pi}{6\times2^{k-1}}$	$3\times2\times2^{K-2}\times2\times\sin\frac{\pi}{6\times2^{K-1}}$	≒ π

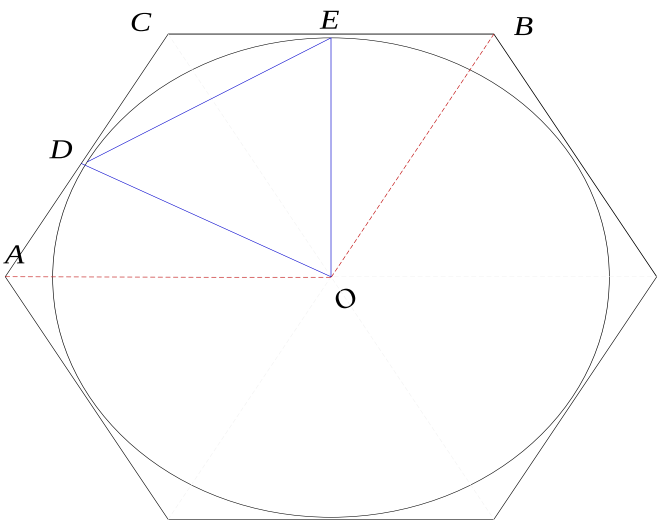
3-A) 원에 외접하는 정육각형의 분할

원에 외접하는 정육각형의 분할 방법은 저자가 찾아본 바로는 아직까지 알려지지 않다고 추정된다. (π 에 대한 모든 문헌을 참조하기는 거의 불가능하고 대표적인 몇 권의 서적 그리고 인터넷 커뮤니티를 활용한 결과이다.)



$Figure-5)$

$Figure-5)$ 에서 원에 외접하는 정육각형을 생각해 보자.



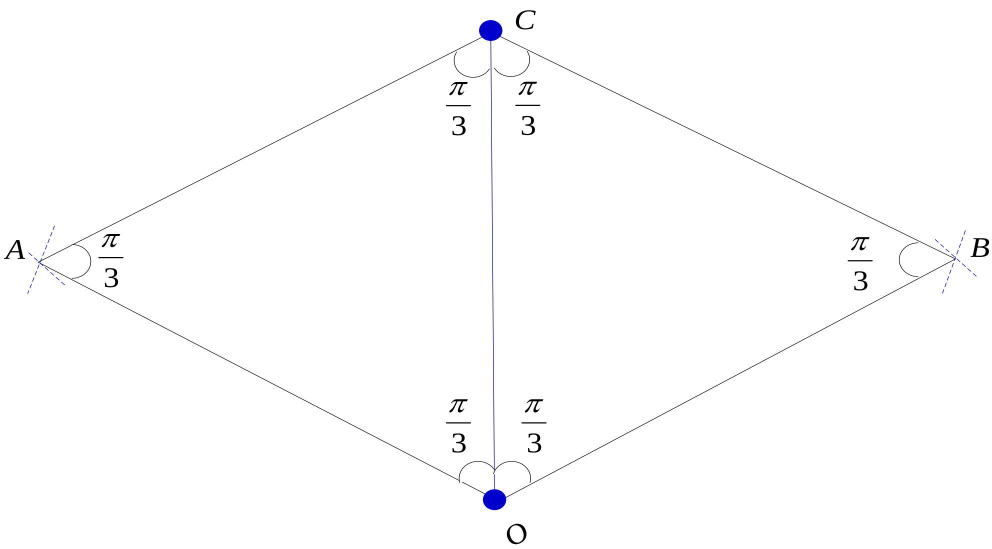
$Figure-6)$

$Figure-6)$에서 선분 $\overline{AC}$의 중점을 D라하고 선분 $\overline{BC}$의 중점을 E라하고, 하자.
이때 점 D, E, O을 직선으로 연결한 정삼각형 $\triangle DOE$을 생각할 수 있다.

$i)$ 선분의 길이가 같고 $\overline{DO}=\overline{EO}$, 각 $\angle \mathrm{DOE}=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $\triangle DOE$는 정삼각형이다.

$ii)$ 그렇다면 선분 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 중점을 어떻게 잡을 수 있을까?

$iii)$ $Figure-7), Figure-8)$에서 그 작도 방법을 살펴보자.



$Figure-7)$

$i)$ 정삼각형 $\triangle AOC$와 $\triangle BOC$을 생각해 보자.

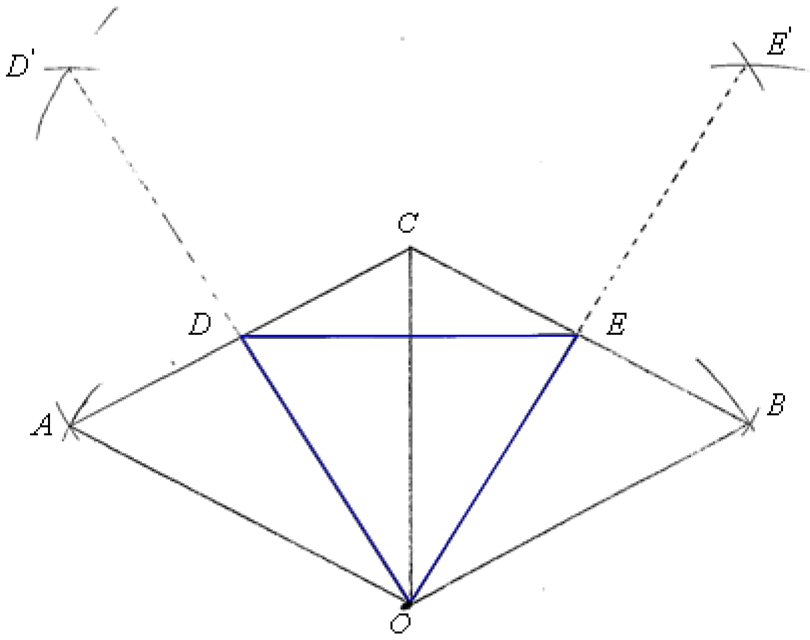
$ii)$ 정삼각형 $\triangle AOC$와 $\triangle BOC$을 작도하기 위해 기준선 $\overline{OC}$을 긋는다.

$iii)$ 길이가 k인 선분 $\overline{OC}$에서 점 C와 O을 중심으로 각각의 원을 그린다.

$iv)$ 이때 두 원이 만나는 점을 각각 A와 B라 하자.

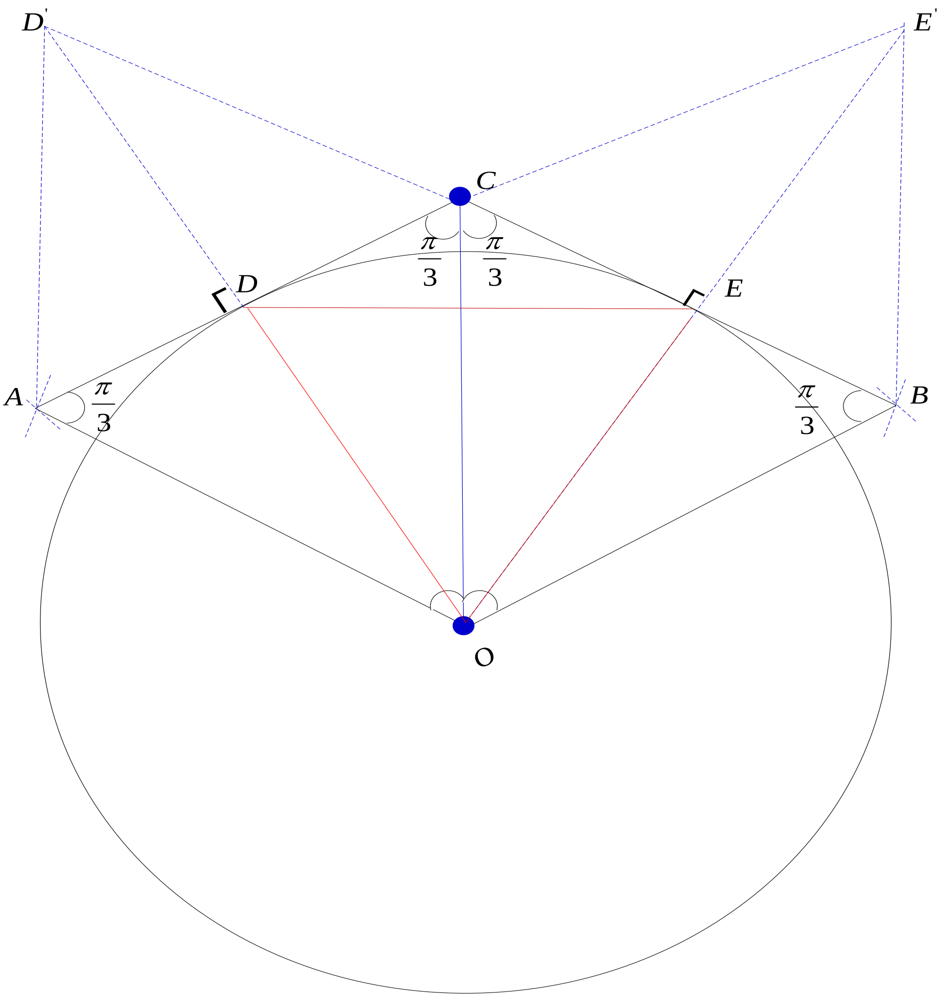
$v)$ 점 A, O, C을 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle AOC$가 된다.

$vi)$ 점 B, O, C을 직선으로 연결하면 정삼각형 $\triangle BOC$가 된다.



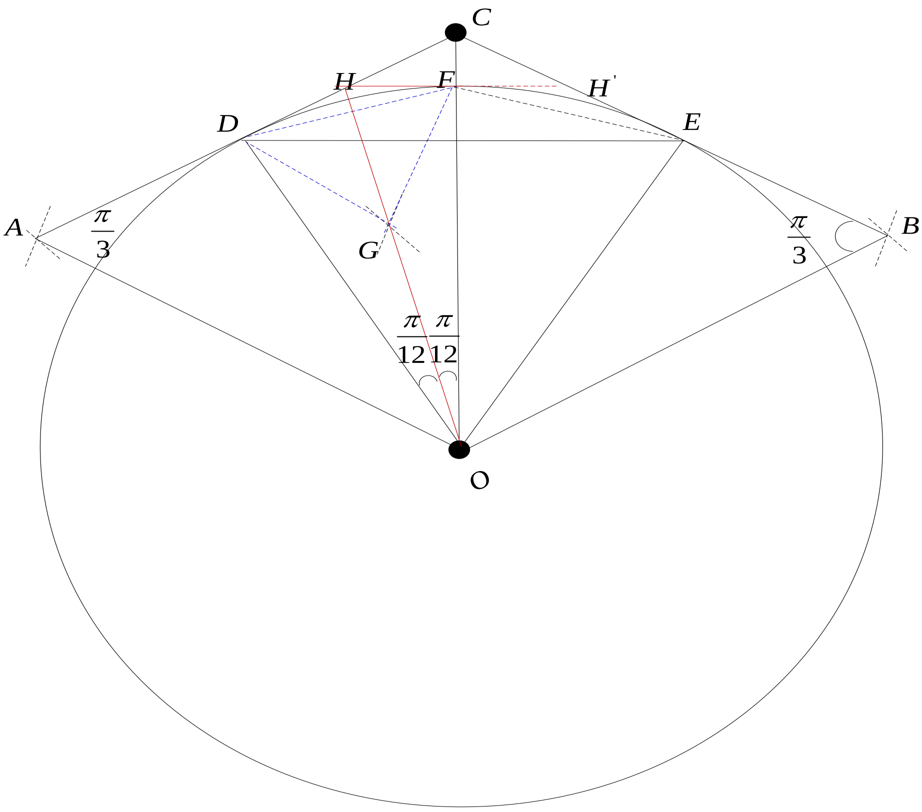
$Figure-8)$

$i)$ $Figure-8)$ $Figure-9)$ 에서 선분 $\overline{AC}$ 와 선분 $\overline{BC}$ 의 각각의 중점 D 와 E 을 잡으려 한다.
$ii)$ 길이가 k 인 선분 $\overline{AC}$ 에서 점 A 와 C 을 중심으로 각각의 원을 그린다.
이때 두 원이 만나는 점을 D' 라고 하자.
$iii)$ 선분 $\overline{AC}$ 에 대해서 선분 $\overline{D'O}$ 는 수직이등분선 임으로 두 선이 만나는 점을 D 라고 하자.
$iv)$ 선분 $\overline{BC}$ 에 대해서도 동일하게 적용되므로 점 E 을 잡을 수 있다.



$Figure-9)$

〉



$Figure-10)$

$Figure-10)$ 에서 우리는 원 O 에 외접하는 정육각형이 정십이각형으로 분할될 수 있음이 가능함을 살펴보도록 하자.

$i)$ 이등변삼각형 $\triangle DOF$ 을 생각해 보자.

$ii)$ 이때 이등변삼각형 $\triangle DOF$ 을 수직 이등분이 가능한 직선을 생각할 수 있다.

$iii)$ 수직 이등분이 갖추어야 할 조건은 선분 $\overline{DF}$ 와 수직이면서 동시에 이등분을 하는 점을 지나야 한다.

$iv)$ 선분 $\overline{DF}$ 와 수직이면서 동시에 이등분을 하는 점을 찾기 위해서 선분 $\overline{DF}$ 을 밑변으로 갖는 정삼각형 $\triangle DGF$ 을 생각해 볼 수 있다.

$v)$ 이때 점 G 는 선분 $\overline{DF}$ 을 수직이등분 할 수 있는 점이므로, 이등변삼각형 $\triangle DOF$ 을 수직이등분할 수 있는 직선은 점 G 을 지나야 한다.

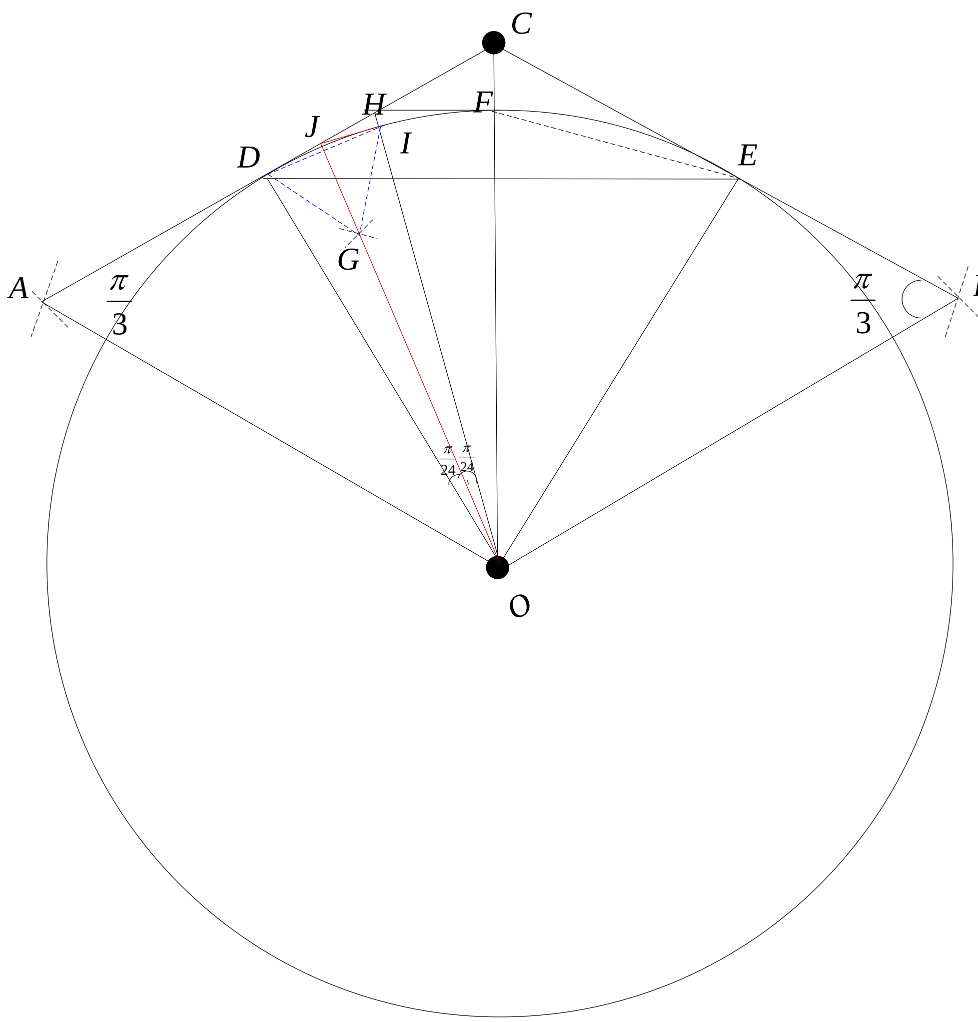
$vi)$ 점 O 와 G 을 동시에 지날 수 있는 선은 단 하나이므로, 선분 $\overline{AC}$ 와 만나는 선분 $\overline{OH}$ 을 생각해 볼 수 있다.

$vii)$ 이때 삼각형 $\triangle DOH$ 와 삼각형 $\triangle FOH$ 을 생각해 보자. 두 삼각형에서 선분 $\overline{DO} = \overline{FO}$ 의 길이가 같고, 선분 $\overline{OH}$ 가 공통이고 각 $\angle \mathrm{DOH} = \angle \mathrm{FOH}$ 이다. 따라서 두 삼각형은 합동이다.

$viii)$ 또한 정삼각형 $\triangle AOC$ 에서 각 $\angle \mathrm{CAO} = \angle \mathrm{ACO} = \pi/3$ 이고, 삼각형 $\triangle CDO$ 에서 각 $\angle \mathrm{DCO} = \pi/3$ 이고 $\angle \mathrm{COD} = \pi/6$ 이므로 $\angle \mathrm{CDO} = \pi/2$ 이다.

ix) 따라서 $\angle \mathrm{CDO} = \pi/2$ 이므로 $\triangle DOH$ 는 $\angle \mathrm{HDO} = \pi/2$ 인 직각삼각형이 되며 $\triangle DOH$ 와 합동인 $\triangle FOH$ 또한 직각삼각형이 된다.

x) 이때 선분 $\overline{DH} = \overline{HF} = \overline{H'F}$ 의 길이는 같으므로, 선분 $\overline{HH'}$ 의 길이는 원에 외접하는 정십이각형의 한변의 길이가 된다.

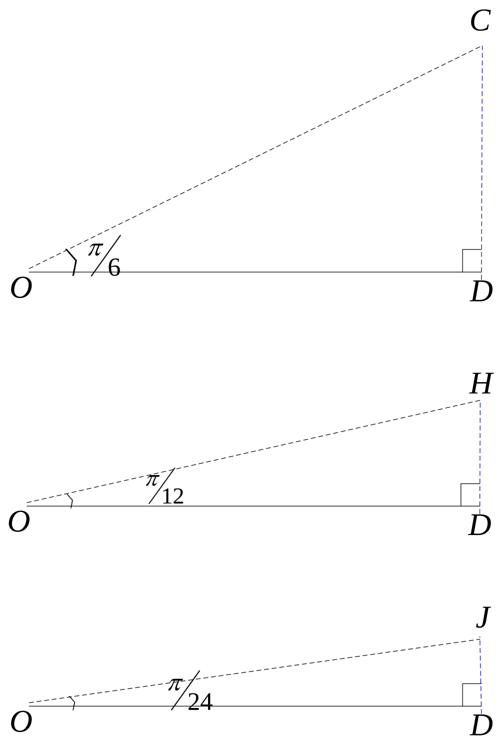


$Figure-11)$

$i)$ $Figure-11)$ 의 정이십사각형의 작도는 $Figure-10)$ 의 정십이각형의 작도와 유사하므로 생략하기로 한다.

3-B) π 의 upper bound value

$Figure-9)$ $Figure-10)$ $Figure-11)$ 에서 삼각형의 다음과 같은 특징을 찾을 수가 있다.



원에 외접하는 정육각형을 이분할 할 경우에

$i)$ 밑변 $\overline{OD}$ 의 길이는 일정하다.
$ii)$ 밑변 $\overline{OD}$ 의 길이를 갖는 삼각형의 끼인각은 $1/2$ 으로 준다.
$iii)$ 언제나 밑변 $\overline{OD}$ 와 수직인 선이 있으므로 직각삼각형 형태로 존재한다.
$iv)$ 따라서 밑변 $\overline{OD}$ 와 수직인 선의 길이를 구하기 위해서는 $\tan\theta$ 의 값을 구하면 알 수 있다.
$v)$ 이전의 변을 분할하면서 2배로 변의 수가 늘어난다.

차수	도형	한변의 길이	π 의 근사값	
n=1	정육각형	$2\times\tan\pi/6$	$3\times2\times\tan\pi/6$	3.46410161513
n=2	정십이각형	$2\times\tan\pi/12$	$6\times2\times\tan\pi/12$	3.21539030917

n=3	정이십사각형	$2\times\tan{\pi}/{24}$	$12\times2\times\tan{\pi}/{24}$	3.15965994209
n=4	정사십팔각형	$2\times\tan{\pi}/{48}$	$24\times2\times\tan{\pi}/{48}$	3.14608621513
n=5	정구십육각형	$2\times\tan{\pi}/{96}$	$48\times2\times\tan{\pi}/{96}$	3.14271459964
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n=k	정 $6\times2^{k-1}$ 각형	$2\times\tan{\pi}/{6\times2^{k-1}}$	$3\times2\times2^{K-2}\times2\times\tan{\pi}/{6\times2^{K-1}}$	$\fallingdotseq\pi$

따라서,
우리가 구한 π의 근사값은 $3\times2\times2^{K-2}\times2\times\sin{\pi}/{6\times2^{K-1}}<\pi<3\times2\times2^{K-2}\times2\times\tan{\pi}/{6\times2^{K-1}}$ 이다.

Conclusion)

본 논문에서는 이미 알려진 원에 내접하는 정육각형의 이분할 작도법뿐 아니라 원에 외접하는 정육각형의 이분할 작도법이 가능함을 살펴보았다. 이를 바탕으로 π값의 fast approximation을 구할 수 있었다.

[Reference]

[1]Jonathan M. Borwein, FRSC,The Life of Pi:From Archimedes to Eniac and Beyond, Mathematics in Culture, Draft 1.4/1.5, 29/07/04:25/09/05

[2] Jorg Arndt and Christoph Haenel, Pi Unleashed, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] David Blatner, The Joy of Pi, Walker and Co., New York,1997.

[4] Petr Beckmann,A History of Pi ,St. Martin's Griffin; 3rd edition edition (July 15, 1976)

[5] Lennart Berggren,Pi: A Source Book, Springer; 3rd ed. edition (November 29, 2010)

external link

[6]http://en.wikipedia.org/wiki/Pi

[7]http://www.jimloy.com/geometry/pi.htm

[8]http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_circle

[9]http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Squaring_the_circle.html

[10]http://gilparha.org/wiki/index.php/Squaring_Circle#.EA.B3.A0.EB.8C.80_.EA.B7.B8.EB.A6.AC.EC.8A.A4_.ED.95.B4.EB.B2.95_2_:_.EB.94.94.EB.85.B8.EC.8A.A4.ED.8A.B8.EB.9D.BC.ED.88.AC.EC.8A.A4-.ED.8C.8C.ED.91.B8.EC.8A.A4_.ED.95.B4.EB.B2.95