«Первая теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» не является даже правдоподобной гипотезой

Дм. Ватолин

В настоящей работе доказано, что непротиворечивый вывод «гёделевой формулы» возможен лишь в теории, в которой запрещено полноценно рассуждать о доказательствах. Гёделевы допущения не вытекают из безусловных метаматематических аксиом.

«Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» утверждает, что в арифметике существует недоказуемая гёделева формула такая, что её отрицание так же не может быть доказано. По гёделевым же доводам, любая достаточно богатая математическая теория должна содержать подобную формулу. Гёделевы аргументы бездоказательны и противоречивы.

§1

Пусть в теории арифметики используются подстановки формул и функторов в формулы и функторы. Числовые значения функторов и истинностные значения формул, пусть зависят от таких же значений, используемых при подстановках. В частности, значения функторов могут зависеть от истинностных значений формул.

Гёдель [1] даёт способ рекурсивного перечисления через натуральные числа всех формул теории арифметики и всех доказательств арифметики – последних, как некоторых упорядоченных цепочек формул, выстраиваемых по правилам логического вывода. Каждой формуле и каждой цепочке формул присваивается натуральный номер, называемый «гёделевым номером». Из цепочек формул выделяемы рекурсивным перечислением те, которые суть доказательства. Гёделевы номера формул и цепочек формул выбираются так, что они не равны нулю.

Следуя изложению [3], определим функторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\varphi}$:

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) =$ гёделеву номеру той формулы, доказательство которой имеет гёделев номер $\mathbf{p}$.

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) = 0$, если $\mathbf{p}$ не является номером какого-либо доказательства.

$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) =$ гёделеву номеру формулы $\boldsymbol{\alpha}$, полученной подстановкой числа $\mathbf{n}$ вместо свободной переменной в такую формулу $\boldsymbol{\beta}$, которая зависит от одной свободной переменной и имеет гёделев номер $\mathbf{m}$.

$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$, в противном случае.

Доводы Гёделя сводимы к следующим: Пусть формула: $\neg\, \exists \mathbf{p}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}))$, обозначенная как $\boldsymbol{\Psi}$, имеет гёделев номер $\mathbf{M}$. Тогда формула Гёделя $\boldsymbol{\Phi}$, полученная подстановкой номера $\mathbf{M}$ в формулу $\boldsymbol{\Psi}$, такова: $\neg\, \exists \mathbf{p}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}))$. $\boldsymbol{\Phi}$ имеет гёделев номер $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{M}, \mathbf{M})$, в связи с указанной подстановкой.

Предположим, $\mathbf{\Phi}$ доказуема. Тогда, существует номер $\mathbf{p}$ для доказательства $\mathbf{\Phi}$. По определению функции τ получаем, что $\tau(\mathbf{p}) = \text{гёделеву номеру } \mathbf{\Phi} = \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$. Т.е. истинно $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p})$, т.е. истинно отрицание формулы $\mathbf{\Phi}$. Т.к. из доказуемости следует истинность $\mathbf{\Phi}$, то предположение ведёт к противоречию. Предположим, доказуема (следовательно, истинна) формула $\neg\mathbf{\Phi}$. Отрицание $\mathbf{\Phi}$ говорит в точности о том, что существует номер $\mathbf{p}$ такой, что $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p})$. Так как гёделевы номера формул не равны нулю, то $\mathbf{p}$ не может быть номером, не являющимся номером доказательства. Т.е. $\mathbf{p}$ – номер доказательства. Тогда, поскольку $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p})$, это доказательство формулы с гёделевым номером $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$. Т.е. $\mathbf{\Phi}$ доказуема. Значит, формула $\mathbf{\Phi}$ истинна одновременно с истинностью $\neg\mathbf{\Phi}$. Приводим к противоречию предположение о доказуемости формулы $\neg\mathbf{\Phi}$.

В гёделевой арифметике можно говорить о доказательствах как о предметах и о взаимоотношениях между числами и доказательствами. Собственно, формула $\exists\mathbf{p}\ (\mathbf{f} = \tau(\mathbf{p}))$ считается содержательно говорящей о том, что «формула, имеющая гёделев номер $\mathbf{f}$, доказуема». Следовательно, по поводу этих взаимоотношений можно рассуждать внутри гёделевой арифметики, для чего и создан её язык. В частности поэтому (как можно хотя бы ожидать по логике вещей), изложенное выше рассуждение должно быть рассуждением гёделевой арифметики.

Если же вывод о недоказуемости гёделевой формулы можно сделать внутри гёделевой арифметики, то совместное определение такой формулы и функтора, перечисляющего доказательства, оказывается противоречивым. Действительно, пусть предположение о доказуемости $\mathbf{\Phi}$ уже приведено к противоречию безусловно, т.е. из аксиом гёделевой арифметики (так, как это сделано выше). Выводим отсюда безусловно, т.е. как формулу гёделевой арифметики, что «$\mathbf{\Phi}$ недоказуема». Тогда, каков бы ни был номер $\mathbf{p}$, он не номер доказательства для формулы $\mathbf{\Phi}$. Тогда, по определению τ, для каждого $\mathbf{p}$ верно, что $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \neq \tau(\mathbf{p})$. Т.е. верна формула $\neg\ \exists\mathbf{p}\ (\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p}))$, т.е. верна $\mathbf{\Phi}$. Это есть вывод формулы $\mathbf{\Phi}$ из аксиом гёделевой теории арифметики. Вывод имеет конкретный гёделев номер. Находим, что «$\mathbf{\Phi}$ доказуема».

Чтобы избежать явного противоречия, можно предположить, что вывод о недоказуемости Ф проводим только в метатеории и не может быть проведён в самой теории. Но последнее влечёт, что вывод недоказуемости Ф возможен лишь тогда, когда в теории запрещено полноценно рассуждать о доказательствах как о предметах, описываемых языком теории, для которых он и был создан. Запрет в полунеявном виде берётся из ниоткуда, при полном отсутствии обоснования. В частности, именно тогда, по гёделевой дедукции, в непротиворечивой теории доказуемость формул не влечёт их истинность (доказуемость формулы означает выводимость из аксиом). Выводя теорему в метатеории, описывающей «все математические теории», необходимо иметь хотя бы какое-нибудь разумное и достаточное основание для столь патологичной дедукции: Ни в одной математической практике нет доказанной ложной формулы. Если бы такая формула была получена, то потерян был бы сам смысл доказательства. Не вытекает ли противоречие с естественной логикой из дефектов гёделевых определений? Свойства гёделевой дедукции зависят от произвола определений в отношении правил сборки формул. Чем задана правильность определений? Доводами могли бы быть метаматематические аксиомы. Но, откуда взяты такие аксиомы? Почему они необходимы для всех теорий? Гёделевы допущения навязаны без малейшего внятного объяснения.

§2

Уточним «исходные данные». T – теория (метатеория), в которой даются все определения для теории S, интерпретируемой средствами теории T. Это означает, что в T: определяются отношения и функторы для теории S; доказываются теоремы, которые суть – аксиомы теории S.

В результате, средствами теории T даётся определение, что значит «формула $\in$ S». Теория здесь отождествляется с множеством формул, функторов и т.п., которые в ней могут быть сформулированы или заданы, и тем самым, содержатся. Если ψ – формула, то $\psi \in S \Rightarrow \psi \in T$, обратная импликация, вообще говоря, неверна. Если M – теория, ψ – формула, то считаем, что «ψ есть M-формула» означает то же, что и «$\psi \in M$».

В качестве теории S формулируем арифметику, называемую здесь GA – «арифметикой Гёделя». В одном из вариантов теории S так или иначе можно говорить: о доказуемости S-формул, о гёделевых номерах S-формул, о гёделевых номерах цепочек S-формул, о гёделевых номерах доказательств. Для этого, средствами T определён оператор Prf так, что если ψ есть S-формула, то $\mathrm{Prf}(\psi)$ – S-формула, означающая «ψ доказуема средствами S». При этом, $\text{гед.ном.}(\psi)$ означает гёделев номер формулы ψ. Если W – цепочка S-формул, то $\text{гёд.ном.}(W)$ означает гёделев номер цепочки W. Функтор, ставящий в соответствие каждой S-формуле её гёделев номер, входит в S. Аналогично, принадлежат S функторы, перечисляющие цепочки формул, выводы и доказательства. В другом варианте, функция гёд.ном. не находится среди предметов теории S, но есть предмет теории T.

В качестве T выберем теорию классической арифметики CA. В CA классическим способом определяются формулы и функторы, которые можно подставлять друг в друга. Пусть в CA невозможно говорить о доказуемости CA-формул, хотя такое требование не обязательно, при соответствующих аксиомах. Арифметику Пеано обозначим PA. Эту теорию можно выбрать в качестве T, или можно отождествить с GA. Последнее отождествление не справедливо, так как Пеано рассматривал свою арифметику совершенно в другом контексте. Естественнее считать $PA = CA$.

S-вывод формулы ψ – это цепочка S-формул, являющаяся выводом в теории T формулы ψ из посылок, которые суть S-формулы, проводимый без расшифровки атомарных S-формул. Атомарные формулы теории S, это такие её формулы, которые не могут быть разбиты на подформулы средствами S. S-теорема – это такая формула, которая стоит в конце хотя бы одного S-вывода из аксиом теории S (S-аксиом). S-доказательство, или безусловный S-вывод – это S-вывод, посылки которого суть S-аксиомы. Если S-вывод не является безусловным, то он является условным S-выводом.

Аналогично определяется T-вывод, T-доказательство и т.п. Каждый S-вывод является одновременно T-выводом. Обратное не верно. Каждая S-теорема есть T-теорема, но не обратное.

В теории S вводится **логическое правило**: если вывод формулы ψ есть S-доказательство, то мы можем отсюда заключить, что верна формула $\mathrm{Prf}(\psi)$.

Средствами T в теории S определяется множество формул «верных в S». Каждая числовая формула из T считается либо «верной в T», либо «неверной в T» вне зависимости от её доказуемости в T. Подразумевается, что возможно верифицировать каждую формулу. Это интуитивное требование (аксиома) классической логики. Когда «верными» определены только формулы $\in$ T, которые доказуемы средствами T, нарушаются границы двузначной логики. Но по мнению конструктивистов, «истинность» или «ложность» формул недоказуемых вместе с их отрицанием не проверяема средствами доказывающей теории, поэтому, бессодержательно постулировать только значения «истины» и «лжи» внутри такой теории. Если утверждение и его отрицание не имеют доказательств, то утверждению можно приписать вместо «истины» или «лжи» значение «не определено». Так или иначе, формула $\in$ S заведомо «верна в S», если она доказуема в T. В частности, каждая S-теорема «верна в S». Относительно формул $\in$ S, недоказуемых в T, не известно приписывать ли им «истинность» или «ложность», и даже возможно не известно, какие это формулы. Тем не менее, далее предполагаем классическую «истинность» или «ложность» таких формул. Отсюда, «верность в S» некой формулы не влечёт, что формула есть S-теорема, т.е. что она выводима из S-аксиом.

Замечание. Если формула ψ получена в результате S-вывода, но хотя бы одна из посылок вывода извлечена не из S-аксиом, то нельзя применить к формуле ψ отмеченное выше правило вывода и заключить средствами теории S, что формула $\mathrm{Prf}(\psi)$ верна.

§3

Для вывода противоречия в S нам потребуются два утверждения:

1. Для любой S-формулы ψ средствами теории S из доказуемости ψ можно извлечь, что ψ верна. Т.е., в S верна аксиома: $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ (схема аксиом). Эту аксиому можно заменить эквивалентным правилом вывода.

2. Существует формула φ теории S такая, что средствами S доказуемо, что $\varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prf}(\varphi)$.

Пусть для S, предположительно без порочного круга, определён предикат $\mathrm{Pr}(z)$, означающий: «доказуема формула с гёделевым номером z». Если χ – S-формула, то формула $\mathrm{Prf}(\chi)$ означает S-формулу $\mathrm{Pr}(\text{гёд. ном.}(\chi))$. Пусть $\mathrm{sb}(n, m)$ – гёделев номер формулы, полученной подстановкой номера m вместо свободной переменной в такую формулу с одной свободной переменной, гёделев номер которой есть n. Допустим, функции гёд. ном. и sb – предметы теории S (иной случай рассмотрим далее). Пусть μ – S-формула, z – единственная свободная переменная этой формулы. Рассмотрим формулу $\mu(\mathrm{sb}(t, t))$, t – свободная переменная. Пусть, $\text{гёд. ном.}(\mu(\mathrm{sb}(t, t))) = L$. Пусть через ψ обозначена формула $\mu(\mathrm{sb}(L, L))$. По определению sb: $\text{гёд. ном.}(\psi) = \text{гёд. ном.}(\mu(\mathrm{sb}(L, L))) = \mathrm{sb}(L, L)$. Значит $\psi \Leftrightarrow \mu(\mathrm{sb}(L, L)) \Leftrightarrow \mu(\text{гёд. ном.}(\psi))$. В качестве φ возьмём формулу ψ, для которой μ есть $\neg\mathrm{Pr}$. Этот вывод есть S-доказательство.

Выведем противоречие, предполагая, что аксиома из 1, есть S-теорема. Действительно, рассуждая в S, предположим, что φ доказуема средствами S, т.е. в S предположим, что верно $\mathrm{Prf}(\varphi)$. По указанной аксиоме получаем, что в S верна φ. Тогда, из утверждения 2, (средствами S) извлекаем верность $\neg\mathrm{Prf}(\varphi)$. Это противоречие. Следовательно, предположение о доказуемости φ неверно. Следовательно, (это вывод из аксиом S) верно $\neg\mathrm{Prf}(\varphi)$. Но тогда, по утверждению, указанному в 2, верна φ. Это S-доказательство формулы φ. Применяя правило вывода §2, выводим $\mathrm{Prf}(\varphi)$. Снова противоречие.

Если аксиома $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ не является S-теоремой, то она должна быть хотя бы теоремой T (иначе, не возможен вывод в метатеории недоказуемости φ), причём эта теорема одновременно есть S-формула. Тогда, в T можно дать приведённый выше вывод «безусловной недоказуемости φ средствами S» – в качестве T-теоремы и S-формулы, но не S-теоремы. Из недоказуемости φ в S можно извлечь истинность φ (в силу 2), и установить истинность φ S-выводом. В силу замечания §2, тогда нельзя переходить к утверждению о верности $\mathrm{Prf}(\varphi)$. Таким способом в T можно установить истинность φ без видимого противоречия.

Из такого рода «недоказуемости» формул φ и $\neg\varphi$ в S можно вывести, что «S непротиворечива и неполна» (если непротиворечива T, т.к. для каждой формулы полной теории существует доказательство самой этой формулы, либо её отрицания).

§4

Не признавая утверждение $\forall\psi \in S\ (\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi)$ в качестве S-аксиомы, нельзя говорить о том, что доказана классическая невыводимость φ. В самом деле, доказана невыводимость φ в теории S, почему-то отождествляемой с «арифметикой», но в которой запрещено извлекать из доказуемости формул их истинность. «Недоказуемость» формулы φ находится относительно такой «неполноценной доказуемости». И выводы Гёделя, в лучшем случае, имеют силу только для подобных патологичных теорий.

Между тем, формула $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ доказуема в S для каждой доказуемой в S формулы ψ, поскольку, из доказательства ψ выводим $\mathrm{Prf}(\psi)$ как теорему S. Импликация же $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ верна, если верны формулы $\mathrm{Prf}(\psi)$ и ψ. В итоге, «для доказуемых формул доказуемость влечёт истинность» – теорема $\in$ S. Для недоказуемых ψ формула $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ тем более выводима в S. Отсюда, в S выводимо «для всех формул $\psi \in S$ верно $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$». Но может быть в S нельзя делать обобщающие заключения, даже если каждый конкретный факт установим? Подобные неявные запреты на формирование обобщающих предложений – в виде умышленного отсутствия каких-то логических правил – не допускаются в обычной математике. Почему тогда эти патологии должны быть допустимы в гёделевой арифметике? Видно, что если и можно придумать причины, по которым формула $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ не выводима в гёделевой арифметике, то они будут весьма нелепыми.

Отметим ещё один факт: недоказуемость формулы, взятой в классической арифметике, Гёделем не доказана уже только потому, что формула φ не совпадает ни с одним из таких утверждений арифметики. Среди последних нет утверждений о доказуемости или недоказуемости формул. Тем самым, формулу φ можно ввести в арифметику как символ X, никак не связанный аксиомами арифметики. X тривиально недоказуемо, поэтому, в теории, содержащей аксиомы изначальной арифметики и, как элемент синтаксиса, утверждение X (не в качестве аксиомы). Т.е. теория, «расширенная» за счёт введения X, формально «неполна». Это же не значит, что изначальная арифметика, не использующая X (или φ), неполна или не достаточно богата. Видно, что настоящего исследования структуры высказываний арифметики Гёделем не проводилось. Нет никакого объяснения и в том, по какой причине выводы о неполноте интерпретируемой теории S (гёделевой арифметики) перенесены на интерпретирующую теорию T (на классическую арифметику)? Интерпретируемой теорией, полнота которой исследуется, как раз логично было бы взять классическую арифметику.

§5

Исходя из своих представлений о правилах сборки формул, Гёдель неявно заложил в теорию противоречивые метаматематические основания, заранее задумав результат. Эти основания не извлекаются ни из какой безусловной заранее заготовленной метатеории, которой обязана следовать логика, и являются предметом бескомпромиссной борьбы без правил.

Пусть функция гёд. ном. или sb не находится среди предметов теории S. Тогда $\mathrm{sb} \notin S$. Тогда подстановки, приведшие к выводу формулы φ, произведены не по правилам построения формул теории S. И тогда $\varphi \notin S$, что доказуемо в теории T. И следовательно, в S не содержится формула $\varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prf}(\varphi)$. Отсутствие в S формулы $\varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prf}(\varphi)$, для конкретной формулы φ, делает «теорему Гёделя» ложной.

Поэтому рассмотрим вариант S, где функции гёд. ном. и sb – предметы $\in$ S. Тогда подстановки §3 – суть средства теории S, и формула $\varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prf}(\varphi)$

доказуема средствами S, как это сделано в §3. Тогда из утверждения 1 из §3 получаем уже отмеченное противоречие.

Кроме того, если внутри теории S есть соответствие между доказательствами и числами, то нарушается одна из основных теорем теории алгоритмов. Поскольку, каждое «эффективное вычисление» сводимо к некоторому доказательству. Действительно, назовём «эффективной всюду вычислимой» рекурсивную функцию F, область определения которой весь натуральный ряд, и для которой доказуемо, что «для каждого натурального числа n значение $F(n)$ вычислимо за конечное число шагов» («шаг» есть операция теории). Пусть $\tau(p) = f$ означает, что вывод под номером p доказывает формулу с номером f. Формула с номером f имеет вид «для каждого натурального n вычислимо $F(n)$» для некоторой функции F, определённой только на натуральных числах, либо имеет другой вид. Если второе, то, пользуясь нумерацией доказательств, перебираем доказательства и соответствующие им номера $\tau(p) = f$ до тех пор, пока не встретим формулу первого вида. Когда встретится подходящая формула, присвоим функции F первый номер, обозначив её F_1. «Эффективная всюду вычислимость» F_1 утверждается найденной формулой, гёделев номер которой пусть будет f_1, а номер p_1 её доказательства пусть окажется минимальным из всех возможных. Затем, найдём доказательство с номером $p_2 > p_1$ для функции F_2, подытоженное формулой с номером f_2, и т.д. В итоге, составим последовательность номеров такую, что формула под номером f_n, с номером её доказательства p_n наименьшим из тех, что $> p_{n-1}$, доказуема, и утверждает «эффективную всюду вычислимость» функции F_n. Таким способом перечислим все эффективно всюду вычислимые функции, не пропустив ни одной. Функция H такая, что $H(n) = F_n(n) + 1$, эффективно всюду вычислима, т.к. доказуемо, что для каждого n функция F_n находится за конечное число шагов, и значение $F_n(n)$ вычислимо на конечном шаге. Поскольку H отличается от перечисленных функций, то получаем ещё одно противоречие.

Отметим как формируется порочный круг в гёделевых определениях. Чтобы определить гёделеву формулу, необходимо определить функцию τ, но чтобы определить τ, требуется определить гёделеву формулу, так как одно из значений τ определимо через такую формулу. В такого рода «неявных» определениях определяемое, которое так же есть неизвестное (в гёделевом случае – пара из функции и формулы), строится через предметы, зависящие от определяемого, и может находиться в обеих частях равенства или знака равносильности. Неявные определения вполне допустимы и часто полезны, но они суть «логические уравнения», для которых ещё необходимо найти хотя бы одно «решение». Т.е. определяющей формулы недостаточно для наличия определяемого предмета, необходимо так же доказательство существования такого предмета. Неявное определение, которое влечёт отсутствие определяемого, назовём «порочным кругом». Поскольку определение пары из гёделевых функции и формулы влечёт противоречие, то такое определение и вводит в порочный круг.

Гёделева конструкция основана на идее «парадокса лжеца», который можно естественно истолковать как неявное определение. Действительно, фразу «я лгу» можно толковать: «нечто утверждаемое мною в точности в этой фразе равносильно отрицаемому мною». Т.е. во фразе заявляется неявно о существовании утверждаемого X, определяемого условием $X \Leftrightarrow$ неX. Если существование X допустить только на основании такого особого определения для X, то немедленно находится противоречие. Похожие «признаки неявности» имеют другие известные парадоксы. Число, определяемое в парадоксе Ришара, к примеру, должно подчиниться определению (условию), которое равносильно конъюнкции, составленной из отрицаний всех возможных подходящих определений (условий) для определяемого числа и включающей отрицание ришарова определения.

§6

Гёделев вывод в отношении формальной арифметики нелеп. Доводы Гёделя игнорируют действительную разрешающую способность аксиом арифметики, без всякого рассмотрения, без вникания во взаимосвязь аксиом, не могут быть исправлены простым приёмом. Из тех соображений, что в «достаточно богатой» теории достаточно средств для выстраивания формулы гёделева типа, Гёдель извлёк ещё и «неполноту любой теории, содержащей арифметику». Так как это заключение исходит из тех же его зыбких оснований, то оно, по меньшей мере, так же не доказано.

Правдоподобнее выглядит предположение обратное к «тезису Гёделя»: **достаточно богатая теория обладает достаточно богатым – для полноты теории – набором разрешающих средств**. Отсюда, «теорема Гёделя» не является даже правдоподобной гипотезой, не говоря уже о том, чтобы быть «теоремой». Причина, по которой «гёделева теорема» до сих пор выдаётся за «математическое достижение», находится вне математики.

«Первую теорему Гёделя о неполноте» в лучшем случае можно назвать «гёделевой идеологемой», не обоснованной вне зависимости от того, приведено ли, и может ли быть вообще приведено, доказательство противоположной гипотезы. Пользуясь неточностью понятий: «задача», «алгоритм», «доказательное средство» и др., формалисты спекулируют на трудностях познания. Вопрос о полноте нашего математического знания относится к вечным вопросам. И неполнота знания, из-за несовершенства человека, всегда имеет место. Но из незавершённости знания не вытекает неполнота конкретной достаточно развитой теории, если понятия поставить на более чёткую основу. Уточнение понятий всегда может быть подвергнуто критике, из-за того, что, скорее всего, повлечёт сужение класса задач и алгоритмов по отношению к естественным, интуитивным задачам и алгоритмам арифметики. Трудности не влекут невозможность полной теории, разрешающей настолько важный класс задач, что он вполне удовлетворит нашу потребность знать арифметику. Для примера: в теории окажутся разрешимыми все диофантовы уравнения полиномного вида.

Литература

1. Gödel. K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principina Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh für Math. U. Phys., XXXVIII (1931), 173-198.

2. Коэн. Пол.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М. 1969.

3. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М. 1977.