Goldbach' Conjecture (4): The expression of the number of Goldbach' Primes

Tong Xin Ping

Abstract: Use the inclusion-exclusion to show that the expression of the number of Goldbach' Primes.

“1+1”浅见之四：哥德巴赫素数个数的筛法公式

童 信 平

1　素数个数的筛法公式。

N——偶数中的复合数。N＝4，6，8，10，. . . . . . 。

p_i、p_r、p_{r+1}——素数，$2\leqslant p_i\leqslant p_r<\sqrt{N}<p_{r+1}<N$ 。i =1, 2, ⋯, r 。$r=\pi(\sqrt{N})$。

不大于 N 的素数个数 π（N）可以用公式(1)计算。

$$(1)\quad \pi(N)=(r-1)+N-\{[\frac{N}{2}]+[\frac{N}{3}]+[\frac{N}{5}]+\cdots+[\frac{N}{p_r}]\}$$

$$+\{[\frac{N}{2*3}]+[\frac{N}{2*5}]+[\frac{N}{2*7}]+\cdots+[\frac{N}{3*5}]+[\frac{N}{3*7}]+\cdots+[\frac{N}{p_{r-1}p_r}]\}$$

$$-\{[\frac{N}{2*3*5}]+[\frac{N}{2*3*7}]+\cdots+[\frac{N}{3*5*7}]+[\frac{N}{3*5*11}]+\cdots+[\frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}]\}$$

$$+\cdots+(-1)^r[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}]$$

2　哥德巴赫素数个数的筛法公式。

哥德巴赫素数——满足哥德巴赫猜想的素数。即“1+1”的答案(解)。

p——闭区间$[p_r+1, N-p_r-1]$内的素数。必有$(N-p)>p_r$。p 的数量是$\pi(N)_r=\pi(N-p_r-1)-r$。

$a_i+n\,p_i$，$a_{ij}+np_ip_j$，$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，⋯，——以 N 为末项、以 p_i、p_ip_j、$p_ip_jp_k$，⋯为公差的等差数列。其中，$(N, p_i)=1$，$(N, p_ip_j)=1$，$(N, p_ip_jp_k)=1$，⋯。

$\pi(p_i)_r$，$\pi(p_ip_j)_r$，$\pi(p_ip_jp_k)_r$，⋯，——闭区间内，以上的每一个等差数列中的素数个数。

h——p_i不能整除 N 时，p_i的个数。

根据以上规定，我们有 $N=p_i+(N-p_i)=p+(N-p)$。

$N(p,p)_i$——$(N-p_i)$中的素数个数。即闭区间$[0，p_r+1]$和$[N-p_r-1，N]$内的哥德巴赫素数个数。

在《“1+1”浅见之三:用 Eratosthenes 筛法得到哥德巴赫素数》中指出，可以不考虑 $N=p_i+(N-p_i)$中的哥德巴赫素数。换句话说，证明“1+1”就是要指出(N−p)中必有素数（定性分析）或指出这些素数的数量的计算方法（定量分析）。

$N(p,p)_r$——(N−p)中的素数个数。也就是闭区间$[p_r+1, N-p_r-1]$内的哥德巴赫素数个数。

$r_2(N)$——N 的哥德巴赫素数个数。$r_2(N)=N(p,p)_r+2N(p,p)_i\geqslant N(p,p)_r$。

<u>引理 1</u>　如果闭区间内的素数$p=a_i+n\,p_i$，则所讨论的p 都不是哥德巴赫素数。(见《“1+1”浅见之二：如何判断素数p不是“1+1”的解》的推论 1，这里的$a_i=N(p_i)$。)

<u>引理 2</u>　$a_{ij}+np_ip_j$在闭区间内的素数重复的是$a_i+n\,p_i$与$a_j+n\,p_j$中的共有的素数。

$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，$a_{ijkl}+np_ip_jp_{kl}$，⋯，在闭区间内的素数可以此类推。

证明　若$p=a_{ij}+n' p_ip_j=(a_i+ep_i)+n' p_ip_j=a_i+(e+n' p_j)p_i$，它是$a_i+n\,p_i$中的素数。($e\geqslant 0$。)

又 $p=a_{ij}+n' p_ip_j=(a_j+dp_j)+n' p_ip_j=a_j+(d+n' p_i)p_j$，它是 $a_j+n\,p_j$ 中的素数。($d\geqslant 0$。)

由此可见，$a_{ij}+np_ip_j$ 中的素数重复的是 a_i+np_i 与 a_j+np_j 中共有的素数。共 $\pi(p_ip_j)_r$ 个。

$a_{ijk}+np_ip_jp_k$，$a_{ijkl}+np_ip_jp_{kl}$，…，在闭区间内的素数可以此类推。证毕。

定理 1　在闭区间$[p_r+1, N-p_r-1]$内，哥德巴赫素数个数 $N(p,p)_r$ 可按公式(2)计算。

$$N(p,p)_r=\pi(N)_r-\sum_{2\leqslant i\leqslant r}\pi(p_i)_r+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r}\pi(p_ip_j)_r-\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant r}\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^{r-1}\pi(p_2p_3\ldots p_r)_r \tag{2}$$

证明　由引理 1 可知，$a_i+n\,p_i$ 在闭区间内的素数不是哥德巴赫素数，应该从 $\pi(N)_r$ 中减去，合计后是 $\Sigma\,\pi(p_i)_r$。由引理 2 可知，在减去 $\Sigma\,\pi(p_i)_r$ 和 $\Sigma\,\pi(p_j)_r$ 时，因为出现重复减去而要补加 $\pi(p_ip_j)_r$，合计后是 $\Sigma\,\pi(p_ip_j)_r$。同理，对于 $\pi(p_ip_jp_k)_r$ 应该是补减，合计后是 $\Sigma\,\pi(p_ip_jp_k)_r$。…其余以此类推，得到公式 (2)。证毕。

3　举例。

例 1：N=130，p_i=2，3，5，7，11。130(p_i)=0，1，0，4，9。p=13～113。$\pi(130)_r=25$。

当 p=1+3n=13，19，31，37，43，61，67，73，79，97，103，109，$\pi(3)_r=12$。

当 p=0+5n，$\pi(5)_r=0$。

当 p=4+7n=53，67，109，$\pi(7)_r=3$。

当 p=9+11n=31，53，97，$\pi(11)_r=3$。

130(3×7)=4，p=4+21n=67，109, $\pi(3\times7)_r=2$。

130(3×11)=31，p=31+33n=31，97，$\pi(3\times11)_r=2$。

130(7×11)=53，p=53+77n=53，$\pi(7\times11)_r=1$。

130(3×7×11)=130，p=130+231n，$\pi(3\times7\times11)_r=0$。

$$130(p,p)_r=\pi(N)_r-\Sigma\,\pi(p_i)_r+\Sigma\,\pi(p_ip_j)_r-\Sigma\,\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^h\pi(p_ip_j\cdots p_k)_r$$
$$=25-\{12+3+3\}+\{2+2+1\}-0=12。$$

(130 的哥德巴赫素数是 17，23，29，41，47，59，71，83，89，101，107，113。)

例 2：N=128，p_i=2，3，5，7，11。128(p_i)=0，2，3，2，7。p=13～113。$\pi(128)_r=25$。

当 p=2+3n=17，23，29，41，47，53，59，71，83，89，101，107，113，$\pi(3)_r=13$。

当 p=3+5n=13，23，43，53，73，83，103，113，$\pi(5)_r=8$。

当 p=2+7n=23，37，79，107，$\pi(7)_r=4$。

当 p=7+11n=29，73，$\pi(11)_r=2$。

128(3×5)=8，p=8+15n=23，53，83，113，$\pi(3\times5)_r=4$。

128(3×7)=2，p=2+21n=23，107，$\pi(3\times7)_r=2$。

128(3×11)=31，p=31+33n=31，97，$\pi(3\times11)_r=2$。

128(5×7)=13，p=13+35n=83，$\pi(5\times7)_r=1$。

128(5×11)=18，p=18+55n=73，$\pi(5\times11)_r=1$。

128(7×11)=51，p=51+77n=—，$\pi(7\times11)_r=0$。

128(3×5×7)=23，p=23+105n=23，$\pi(3\times5\times7)_r=1$。

128(3×5×11)=37，p=37+165n=37，$\pi(3\times5\times11)_r=1$。

128(5×7×11)=128，p=128+385n=—，109, $\pi(5\times7\times11)_r=0$。

$$128(p,p)_r=\pi(N)_r-\Sigma\,\pi(p_i)_r+\Sigma\,\pi(p_ip_j)_r-\Sigma\,\pi(p_ip_jp_k)_r+\cdots+(-1)^h\pi(p_ip_j\cdots p_k)_r$$
$$=25-\{13+8+4+2\}+\{4+2+2+1+1+0\}-\{1+1+0\}=6。$$

（128 的哥德巴赫素数是 19，31，61，67，97，109。）

4　讨论。

我不知道，从人们发现素数到用 Eratosthenes 的筛法来制作素数表花去了多少时间，但是，从 Eratosthenes 筛法到进一步为这个筛法建立筛法公式(容斥公式)，足足花去了 1800 年。

从哥德巴赫发现哥德巴赫素数到用 Eratosthenes 的筛法来制作哥德巴赫素数表并建立筛法公式[1]，是从 1742 年到 1997 年，只用了 255 年时间，时间大大缩短。

这两个筛法公式一旦被证明，中、小学生都可以按“植树问题”来理解和运用，正所谓知难行易。在这

1800 年和 255 年中，并不是数学工具不够用，缺乏的是悟性。由此可见，哥德巴赫猜想的证明可能也不是“现有数学工具在它面前根本用不上”。王元说：“看来，圆法、筛法均已山穷水尽。用它们几乎是不可能证明猜想(A)的，数学家殷切地期望新思想与新方法的产生。”他说出的是圆凿方枘现象，用错了工具才找不着北。

公式(2)比公式(1)更繁琐，甚至是无法进行而没有实用价值，但是，它们在理论上是唯一正确无误的计算公式。是其他计算公式所不能企及的。

参考文献

[1]童信平，偶数 Goldbach 问题解数的计算公式，右江民族师专学报(自然科学版)，1997，3，10－12。