Comment.

Author: Vladimir I. Smirnov
The former research assistant of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS (branch in Frayzino Moscow region)

E-mail: arlof@yandex.ru

Category: Physics Education (perhaps, Mathematical Physics)

The PDF-document (V.I. Smirnov "Invariants…) contains one after another:

1. Comment. – 1p.
2. Abstract: В.И. Смирнов "Инварианты относительно изменения величины независимой переменной и их роль в физике".– 1p.-Russian)
3. Article: В.И. Смирнов "Инварианты относительно изменения величины независимой переменной и их роль в физике".– 16pp. (Russian)
4. Abstract: V.I. Smirnov "Invariants relative to change of value of the independent variable and their role in the physics:. – 1p.
5. Article: V.I. Smirnov "Invariants relative to change of value of the independent variable and their role in the physics". – 15pp.

Реферат

Инварианты Относительно Изменения Величины Независимой Переменной и их Роль в Физике.

В.И. Смирнов

Идентифицирован новый класс инвариантов, величины которых постоянны при изменении величины независимой переменной. Их свойства и метод получения продемонстрированы на уже известных и ещё неизвестных примерах, относящихся к различным областям физики. В частности, были выявлены новые инварианты для прямых линий, пересекающихся в одной точке на плоскости. Кроме того, обнаружен третий (не зависимый от двух уже известных) инвариант электромагнитного поля для частного случая специальной теории относительности. Факт такого обнаружения вступает в противоречие с современными представлениями об инвариантах электромагнитного поля.

Инварианты Относительно Изменения Величины Независимой Переменной и их Роль в Физике.

В. И. Смирнов

Реферат

Идентифицирован новый класс инвариантов, величины которых постоянны при изменении величины независимой переменной. Их свойства и метод получения продемонстрированы на уже известных и ещё неизвестных примерах, относящихся к различным областям физики. В частности, были выявлены новые инварианты для прямых линий, пересекающихся в одной точке на плоскости. Кроме того, обнаружен третий (не зависимый от двух уже известных) инвариант электромагнитного поля для частного случая специальной теории относительности. Факт такого обнаружения вступает в противоречие с современными представлениями об инвариантах электромагнитного поля.

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [1, 2] было показано, что параметры полого фокона (усечённого конуса) с прямолинейной образующей и распространяющегося в нём меридионального луча связаны между собой инвариантным соотношением типа [2, ф-ла (9)]

$$I_j = (-1)^j [R_j(x)\sin\varphi_j \cos\beta + r_j(x)\cos\varphi_j \sin\beta]. \tag{1}$$

В декартовой прямоугольной системе координат X, Y, в которой ось X совпадает с осью фокона, величина I_j не зависит от значения x. Поэтому правая часть выражения (1) названа меридионально-лучевым инвариантом (МЛИ) и обозначена как I_j. Кроме того, в (1) введены следующие обозначения.

$j = 0, 1, 2, 3, ...k+1$ - порядковый номер отражения в фоконе.

k - число отражений.

$R_j(x)$ - радиус фокона в поперечном сечении, проходящем через точку с абсциссой x. В то же время это сечение располагается между двумя другими поперечными сечениями, каждое из которых проходит через точку отражения с порядковым номером j и $j+1$, соответственно.

$r_j(x)$ - ордината точки пересечения луча с плоскостью, содержащей радиус $R_j(x)$.

φ_j - угол между осью X и отрезком луча, расположенным между точками отражения с порядковыми номерами j и $j+1$.

β - конусность фокона (угол между осью фокона и его направляющей).

Выражение (1) записано для случая, когда прямолинейный отрезок луча находится между точками отражения j и $j+1$. Однако в [1, 2] было показано, что равенство $I_j = I_{j+1}$ имеет место для всех j.

С использованием инварианта МЛИ в [1 - 3] были получены формулы для апертурных углов, числа отражений и длины пути луча в фоконе. Достоинством этих формул является то, что они свободны от ограничений, накладывавшихся ранее на величину конусности β.

В ходе дальнейшего изучения МЛИ выяснилось, что при его выводе неявно использовались неизвестные до этого инварианты (50), (57), описывающие свойства пересекающихся на плоскости прямых линий. Более того, оказалось, что эти инварианты вместе с МЛИ (1) и другими, уже известными инвариантами (например, (12), (14), (21)), относятся к ещё неидентифицированному ни в математике, ни в физике классу инвариантов. Инварианты этого класса отличаются от других, прежде всего, тем, что их величины не зависят от величины независимой переменной, которую содержат эти инварианты. С целью упрощения названия и с учётом такой независимости, относящиеся к этому классу инварианты, далее будут условно именоваться cvv-инвариантами (cvv - change of value of a variable- изменение величины переменной).

Также выяснилось, что многие cvv-инварианты могут быть получены общим, несколько формализованным методом. Этот метод основан на, казалось бы, очевидном и, тем не менее, мало известном свойстве, присущем многим аналитическим функциям. По-видимому, недостаточная известность этого свойства объясняет тот факт, что даже уже используемые в физике инварианты, формально относящиеся к cvv-инвариантам, до сих пор не идентифицированы как самостоятельный класс. Складывается впечатление, что инварианты относительно изменения величины независимой переменной (cvv-инварианты) не идентифицированы и в математике. В то же время, существование общего метода нахождения cvv-инвариантов позволяет сравнительно просто проводить проверку многих математических выражений на предмет выявления инвариантных соотношений, содержащих в себе полезную информацию, как для математики, так и для физики.

Поэтому цель настоящей статьи состоит в том, чтобы при помощи уже известных и вновь полученных cvv-инвариантов идентифицировать их как новый реальный класс инвариантов, имеющих общие свойства и общий метод получения их; кроме того, на конкретных примерах продемонстрировать диапазон и потенциальные возможности применения таких инвариантов.

СВОЙСТВА CVV-ИНВАРИАНТОВ

В настоящей статье за основу понятия «инвариант» было принято следующее определение [4]: «Инвариант означает неизменяющееся; этим термином называют всё то, что, будучи определённым образом связано с рассматриваемыми математическими объектами, остаётся неизменным при некоторых их преобразованиях». В случае cvv-инвариантов преобразованием является изменение величины независимой переменной, входящей в рассматриваемые математические объекты, и, следовательно, в cvv-инварианты. После такого определения становится очевидным, что для каждого конкретного значения j, МЛИ (1) является cvv-инвариантом.

В основе формализованного метода получения cvv-инвариантов лежит мало известное свойство многих аналитических функций от одной и той же независимой переменной. Это свойство состоит в том, что функции, определённые на общем для них множестве допустимых значений независимой переменной, связаны между собой соотношениями (инвариантами), которые остаются постоянными по величине при изменении величины независимой переменной.

Универсальность метода получения cvv-инвариантов позволяет использовать его во всех областях физики, в которых имеют дело с указанными выше функциями. Свойства cvv-инвариантов и сущность метода получения их наиболее удобно рассмотреть на примере, взятом из сборника [5].

Так, в задаче 8.2 [5, том 1] рассматривается прямолинейное движение материальной точки вдоль пути $x(t)$ с постоянным ускорением a и со скоростью $v_x(t)$. При этом требуется исключить время t из двух функций

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_{x0}t + x_0, \text{ (a)} \qquad v_x(t) = at + v_{x0} \text{ (b)} \tag{2}$$

и показать, что в любой момент времени t выполняется следующее равенство:

$$v_x^2(t) = v_{x0}^2 + 2a[x(t) - x_0]. \tag{3}$$

Здесь x_0 и v_{x0} - начальные значения пути и скорости, соответственно.

Действительно, полное взаимное исключение явно выраженной переменной t из соотношений (2) приводит к равенству (3), которое справедливо для любого времени t и поэтому является тождеством. Однако величины левой и правой частей этого тождества зависят от конкретного значения t.

Если член $2ax(t)$, зависящий от t, перенести из правой части равенства (3) в его левую часть, то новое равенство

$$v_x^2(t) - 2ax(t) = v_{x0}^2 - 2ax_0 \tag{4}$$

также будет тождеством. Однако, в силу тождественности равенства (4), в этом случае не только правая часть этого равенства, но и его левая часть уже не зависят от величины t. Поэтому для функций (2) левая часть равенства (4), по определению, является cvv-инвариантом и обозначается как

$$I_t = v_x^2(t) - 2ax(t). \tag{5}$$

Правая часть равенства (4) представляет собой форму и величину инварианта (5) при $t = 0$.

Чтобы отличать тождества типа (4), у которых величина каждой части равенства не зависит от значения независимой переменной, от тождеств, имеющих такую зависимость (например, тождество (3)), первые в дальнейшем будут именоваться инвариантными (cvv-) равенствами.

Таким образом, поиск cvv-инварианта сводится к получению cvv-равенства, одна часть которого представляет собой собственно cvv-инвариант, а другая – его величину, которая находится для какого-либо фиксированного значения независимой переменной. Обычно, это значение равно нулю, если рассматриваемые исходные функции в этом нуле не имеют особенностей.

Cvv-инвариант (5) выведен в результате полного исключения явно выраженной независимой переменной. Однако для функций (2) cvv-инвариант можно получить и при частичном исключении этой переменной. Действительно, если при исключении t в выражении (2а) оставить без изменения, например, член $at^2/2$, то равенство, полученное после этого для функций (2),

$$x(t) - \frac{v_0 v_x(t)}{a} - \frac{at^2}{2} = x_0 - \frac{v_0^2}{a} \tag{6}$$

также будет cvv-равенством относительно изменения переменной t, а его левая часть

$$I_t' = x(t) - \frac{v_0 v_x(t)}{a} - \frac{at^2}{2} \tag{7}$$

будет соответствующим cvv-инвариантом.

Таким образом, для одних и тех же функций (2) можно получить несколько различных cvv-инвариантных равенств и, соответственно, cvv-инвариантов. Кроме того, инвариантность cvv-равенства сохранится, если к каждой его части прибавить выражение, которое не зависит от рассматриваемой переменной, или если каждую его часть умножить на такое выражение. Естественно, что эти свойства cvv-равенства переносятся и на cvv-инвариант.

Получение cvv-инвариантного выражения типа (4) или (5) является, хотя и необходимым, но только начальным шагом к получению новой информации. Следующий шаг, кроме знания основ математики из вузовского курса, требует уже специальных знаний в конкретной области исследований и определённого уровня научной интуиции, необходимых для выявления пользы из полученного cvv-инвариантного выражения.

Например, если обе части равенства (4) умножить на постоянную величину $m/2$ (m - масса материальной точки), то получится cvv-равенство

$$\frac{mv_x^2(t)}{2} - max(t) = \frac{mv_{x0}^2}{2} - max_0, \tag{8}$$

которое инвариантно относительно изменения времени t. Из равенства (8) следует cvv-инвариант

$$I_t^{ce} = \frac{mv_x^2(t)}{2} - max(t), \tag{9}$$

который уже имеет определённый физический смысл, соответствующий частному случаю закона сохранения механической энергии.

Кроме всего прочего, примеры получения инвариантов (5) и (9) лишний раз подчёркивают, как важно знать о существовании cvv-инвариантов. Если бы такое знание было, то вместо равенства (3) можно было бы ожидать требование получить более информативное, инвариантное равенство (4) или (8).

Итак, несколько формализованный метод получения cvv-инварианта сводится к следующему. Сначала из аналитических функций (полностью или частично) взаимно исключают общую для них, явно выраженную независимую переменную. При этом предполагается, что такое исключение допустимо. Затем, все члены, зависящие от этой переменной, переносят по одну сторону нового равенства, полученного таким образом. Именно эта сторона равенства представляет собой искомый cvv-инвариант.

ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ CVV-ИНВАРИАНТОВ

Диапазон применения и потенциальные возможности cvv-инвариантов продемонстрируем на дополнительном ряде примеров, взятых из различных областей физики.

<u>Пример 1</u>. В теории колебаний и в оптике широко известно так называемое уравнение эллипса [6, ф-ла (1.24)]

$$\left(\frac{E_x(t)}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{a_1 a_2}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{10}$$

которое получается после взаимного исключения переменной (времени) t из двух функций

$$E_x(t) = a_1\cos(\omega t + \delta_1), \qquad E_y(t) = a_2\cos(\omega t + \delta_2). \tag{11}$$

Эти функции представляют собой x - и y - компоненты вектора напряжённости электрического поля $\mathbf{E(t)}$ плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Z. При этом другие, не зависящие от времени t компоненты обозначают: a_1, a_2 - амплитуды колебаний, ω - круговая частота, $\delta = \delta_1 - \delta_2$ - разность между фазами δ_1 и δ_2.

Выражение (10) получается из функций (11) путём взаимного исключения общей переменной t. Поэтому оно является тождеством относительно этой переменной. Так как величины правой и, следовательно, левой частей выражения (10) не зависят от времени t, то это выражение является cvv-равенством. Поэтому левая часть (10)

$$I_t^{xy} = \left(\frac{E_x(t)}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{a_1 a_2}\cos\delta \tag{12}$$

представляет собой cvv-инвариант, связывающий функции (11) друг с другом. Правая часть равенства (10) соответствует форме и величине этого инварианта при $t = 0$.

<u>Пример 2.</u> Соотношения [6, ф-лы (7.20) и (7.21)]

$$I_1 = n_\varphi^2 - k_\varphi^2 = n^2 - k^2, \text{(a)} \qquad I_2 = n_\varphi k_\varphi \cos\chi_\varphi = nk, \text{(b)} \tag{13}$$

используемые в оптике металлов, также относятся к cvv-равенствам. Согласно [6] в (13a) и (13b) правые равенства называются формулами Кеттелера, а левые (I_1 и I_2) - оптическими инвариантами. Однако в соответствии с принятым в настоящей работе определением, к собственно инвариантам относятся выражения

$$I_\varphi^1 = n_\varphi^2 - k_\varphi^2, \text{(a)} \qquad I_\varphi^2 = n_\varphi k_\varphi \cos\chi_\varphi. \text{(b)} \tag{14}$$

Равенства (13) выведены из следующих функций, зависящих от угла φ падения света на плоскую металлическую поверхность:

$$n_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n^2 - k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi} \tag{15}$$

- показатель преломления [6, ф-ла (7.9)],

$$k_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-n^2 + k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi} \tag{16}$$

- показатель поглощения [6, ф-ла (7.11)],

$$\cos\chi_\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - k^2 - \sin^2\varphi + \Delta_\varphi}}{\sqrt{n^2 - k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi}} \tag{17}$$

- косинус действительного угла преломления света в металле [6, ф-ла (7.7)]. При этом

$$\Delta_\varphi = \sqrt{(n^2 - k^2 - \sin^2\varphi)^2 + 4n^2k^2}\,, \tag{18}$$

n и k - значения n_φ и k_φ при $\varphi = 0$. При этом равенства (13a) и (13b) получены после взаимного исключения переменной φ из функций (15), (16) и (15) - (17), соответственно.

Особенность рассматриваемых инвариантов состоит в том, что cvv-инвариант I_1 связывает между собой две функции n_φ и k_φ, тогда как cvv-инвариант I_2 - три функции n_φ, k_φ и χ_φ.

<u>Пример 3.</u> Оказывается, среди уже известных инвариантов относительно того или иного преобразования координат существуют такие, которые одновременно являются cvv-инвариантами.

Так, в специальной теории относительности (СТО) известно равенство

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2, \tag{19}$$

каждая часть которого представляет собой частный случай квадрата четырёхмерного пространственно-временного интервала. Этот интервал является инвариантом относительно специального лоренц-преобразования [7, ф-лы (5.39)]

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

В СТО такое преобразование справедливо в случае, когда одна, декартова, система координат S' движется относительно другой такой же системы S с постоянной скоростью v, при этом оси координат систем S' и S параллельны между собой, а вектор скорости $\mathbf{v}$ параллелен осям OX' и OX.

Теперь положим, что в формулах (20) координата x и время t являются функциями от скорости v (при этом x', t' не зависят от скорости v). Тогда, после полного, взаимного исключения переменной v из этих формул нетрудно получить равенство, которое будет точно таким же, как (19). Так как параметры x' и t' не зависят от v, то равенство (19), будучи тождеством, инвариантно относительно изменения скорости v, а его левая часть

$$I_v = x^2 - c^2 t^2 \tag{21}$$

представляет собой соответствующий cvv-инвариант, который к тому же одновременно является инвариантом относительно лоренц-преобразования (20). В рассматриваемом случае правая часть cvv-равенства (19) является формой и величиной cvv-инварианта при $v = 0$.

Для физики определённый интерес могут представлять и такие cvv-инварианты, которые получаются из формул (20) путём выбора в качестве независимой переменной других параметров, входящих в эти формулы.

<u>Пример 4.</u> Покажем, что в рассмотренном выше специальном случае СТО cvv-инварианты существуют и для электромагнитного поля. При этом наряду с двумя известными и не зависимыми друг от друга инвариантами, существует не зависимый от них третий инвариант.

Так, в рассматриваемом случае СТО формулы лоренц-преобразования электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$E_x = E'_x, \text{(a)} \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{(b)} \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (c)} \tag{22}$$

- для электрической части поля [8, ф-ла (24,5)],

$$H_x = H'_x, \text{(a)} \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{v}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{(b)} \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{v}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (c)} \tag{23}$$

- для магнитной части поля [8, ф-ла (24,6)]. Здесь $\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{H}_\alpha$ $(\alpha = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ - компоненты векторов напряжённостей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей, соответственно. Кроме того, в общем случае СТО для 4-тензора электромагнитного поля $\boldsymbol{F}_{ik}$ [8, ф-ла (23,7)] известны два инварианта [8, ф-лы (25,1), (25,2)] относительно лоренц-преобразования этого поля

$$\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \boldsymbol{inv}, \tag{24}$$

$$\mathbf{EH} = \boldsymbol{inv}, \tag{25}$$

которые не зависимы друг от друга.

Если учесть соотношения (22a) и (23a), то для специального случая СТО инварианты (24) и (25) можно переписать как

$$\boldsymbol{I}_{em1} = \boldsymbol{H}_y^2 + \boldsymbol{H}_z^2 - \boldsymbol{E}_y^2 - \boldsymbol{E}_z^2 = \boldsymbol{H}_y'^2 + \boldsymbol{H}_z'^2 - \boldsymbol{E}_y'^2 - \boldsymbol{E}_z'^2, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{I}_{em2} = \boldsymbol{E}_y \boldsymbol{H}_y + \boldsymbol{E}_z \boldsymbol{H}_z = \boldsymbol{E}_y' \boldsymbol{H}_y' + \boldsymbol{E}_z' \boldsymbol{H}_z'. \tag{27}$$

Теперь положим, что нештрихованные компоненты $\boldsymbol{E}_\alpha$ и $\boldsymbol{H}_\alpha$, входящие в формулы (22) и (23), являются функциями от переменной $\beta = \boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}$, тогда как штрихованные компоненты не зависят от β. Чтобы получить третий cvv-инвариант $\boldsymbol{I}_{em3}$, необходимо из формул (22) и (23) взаимно исключить явно выраженную переменную β.

Для этого приравняем друг к другу знаменатели, входящие в формулы (22 b) и (23 c). Из полученного равенства найдём

$$\beta = \frac{\boldsymbol{E}_y' \boldsymbol{H}_z - \boldsymbol{E}_y \boldsymbol{H}_z'}{\boldsymbol{E}_y \boldsymbol{E}_y' - \boldsymbol{H}_z \boldsymbol{H}_z'}. \tag{28}$$

Аналогичным образом из (22 c) и (23 b) получим другое выражение для β:

$$\beta = \frac{\boldsymbol{E}_z \boldsymbol{H}_y' - \boldsymbol{E}_z' \boldsymbol{H}_y}{\boldsymbol{E}_z \boldsymbol{E}_z' - \boldsymbol{H}_y \boldsymbol{H}_y'}. \tag{29}$$

Теперь, приравняем друг к другу правые части выражений (28) и (29). В полученном таким образом равенстве слагаемые со штрихами и без них разнесём по его разные стороны. С учётом равенства (27) из нового соотношения следует cvv-равенство, инвариантное относительно изменения β,

$$\boldsymbol{E}_y \boldsymbol{E}_z + \boldsymbol{H}_y \boldsymbol{H}_z = \boldsymbol{E}_y' \boldsymbol{E}_z' + \boldsymbol{H}_y' \boldsymbol{H}_z'. \tag{30}$$

При этом левая часть равенства (30)

$$I_{em3} = E_y E_z + H_y H_z \tag{31}$$

является cvv-инвариантом относительно изменения β. Нетрудно показать, что выражение (31) является также инвариантом относительно лоренц-преобразования (22), (23).

Чтобы показать взаимную независимость инвариантов I_{em1}, I_{em2}, I_{em3}, рассмотрим каждый из них как функцию от четырёх независимых переменных E_y, E_z, H_y, H_z. Кроме того, введём ещё одну, вспомогательную функцию от этих же переменных

$$I_{em4} = E_y + E_z + H_y + H_z. \tag{32}$$

Тогда, функции I_{em1} - I_{em4} будут не зависимы друг от друга [9, §42], если соответствующий им якобиан

$$J = \frac{\partial(I_{em1}, I_{em2}, I_{em3}, I_{em4})}{\partial(E_y, E_z, H_y, H_z)}, \tag{33}$$

хотя бы в одной точке $(E_y, E_z, H_y, H_z)^{(0)}$, не равен нулю. В рассматриваемом случае

$$J = \begin{vmatrix} -2E_y & -2E_z & 2H_y & 2H_z \\ H_y & H_z & E_y & E_z \\ E_z & E_y & H_z & H_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = $$

$$= 2\left(H_y^2 - H_z^2 + E_y^2 - E_z^2\right)\left(H_y - H_z + E_z - E_y\right) \tag{34}$$

Из (34) следует, что якобиан $J = 0$, если имеет место хотя бы одно из соотношений

$$H_y^2 - H_z^2 = E_z^2 - E_y^2, \qquad H_y - H_z = E_y - E_z. \tag{35}$$

Равенства (35) не являются тождествами. Поэтому тождественно не равен нулю и якобиан J. Следовательно, инварианты I_{em1} - I_{em3} не зависимы друг от друга.

Напомним, что третий инвариант (31) получен для специального случая СТО. В то же время, для общего случая СТО принято считать [8], что инварианты (24) и (25) (соответственно, (26) и (27)) являются единственными независимыми. Подробное обсуждение такого противоречия не входит в предмет рассмотрения настоящей статьи и требует отдельного анализа.

Пример 5. Можно показать, что для формул преобразования декартовых прямоугольных координат [4, ф-лы (1.1)]

$$x(\theta) = \tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta + h, \qquad y(\theta) = \tilde{x}\sin\theta + \tilde{y}\cos\theta + k \tag{36}$$

также можно получить cvv-инвариант, но уже относительно изменения угла θ поворота плоскости XY. Здесь функциями угла θ являются старые координаты $x(\theta)$ и $y(\theta)$, тогда как новые координаты $\tilde{x}, \tilde{y}$ и величины их переносов h, k от этого угла не зависят. После взаимного исключения θ в формулах (36), получается следующее cvv-равенство относительно изменения угла θ:

$$[x(\theta) - h]^2 + [y(\theta) - k]^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2. \tag{37}$$

Здесь левая часть равенства (37)

$$I_\theta = [x(\theta) - h]^2 + [y(\theta) - k]^2 \tag{38}$$

является с одной стороны cvv-инвариантом, а с другой - инвариантом относительно преобразования координат (36). При этом правая часть равенства (37) представляет собой форму и величину cvv-инварианта (38) при $\theta = 0$.

Пример 6. Для специалистов-механиков может представлять интерес cvv-инвариант, получаемый, например, из следующих формул [10]:

$$v_M(r) = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}, \qquad w_M(r) = \sqrt{w^2 + r^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}. \tag{39}$$

Эти формулы описывают винтовое движение, состоящее из прямолинейного поступательного движения материальной точки со скоростью v и её вращательного движения с угловой скоростью ω. При этом вращательное движение происходит вокруг оси, которая параллельна направлению поступательной скорости и от которой движущаяся точка отстоит на расстоянии r.

Здесь $w = dv/dt$, $\varepsilon = dw/dt$. При этом $v_M(r), w_M(r)$ - результирующие величины скорости и ускорения винтового движения точки, соответственно. Параметры v, ω, w и ε не зависят от r. Взаимно исключая явно выраженную переменную r из функций $v_M(r)$ и $w_M(r)$, нетрудно получить следующее cvv-равенство относительно переменной r:

$$w_M^2(r)\omega^2 - v_M^2(r)(\varepsilon^2 + \omega^4) = w^2\omega^2 - v^2(\varepsilon^2 + \omega^4). \tag{40}$$

По определению, левая часть равенства (40)

$$I_r = w_M^2(r)\omega^2 - v_M^2(r)(\varepsilon^2 + \omega^4) \tag{41}$$

является cvv-инвариантом, а правая - его формой и величиной при $r = 0$.

Пример 7. Известно, что анизотропная брэгговская дифракция света на ультразвуке (УЗ) происходит наиболее эффективно, когда свет падает на анизотропную среду под углом Брэгга [11, ф-ла (8)]

$$\theta_B = \arcsin\left\{\frac{1}{2n_0}\left[\frac{\lambda_0}{\Lambda} + \frac{\Lambda(n_0^2 - n_1^2)}{\lambda_0}\right]\right\}, \tag{42}$$

и дифрагирует под углом [11, ф-ла (9)]

$$\theta' = \arcsin\left\{\frac{1}{2n_1}\left[\frac{\lambda_0}{\Lambda} - \frac{\Lambda(n_0^2 - n_1^2)}{\lambda_0}\right]\right\}. \tag{43}$$

Здесь λ_0 - длина падающей световой волны, n_0 и n_1 - показатели преломления среды соответственно для падающей и дифрагированной волны.

Пусть в функциях (42) и (43) независимой переменной является длина УЗ-волны Λ. Тогда, после полного, взаимного исключения Λ из этих функций, можно получить тождественное равенство

$$n_1 \cos\theta' = n_0 \cos\theta_B, \tag{44}$$

которое будет связывать между собой углы θ_B и θ'.

В равенстве (44) только n_0 не зависит от переменной Λ. Поэтому, разделив обе части (44) на $\cos\theta_B$, получим cvv-равенство

$$n_1 \frac{\cos\theta'}{\cos\theta_B} = n_0, \tag{45}$$

левая часть которого

$$I_\Lambda = n_1 \frac{\cos\theta'}{\cos\theta_B} \tag{46}$$

для функций θ_B и θ' будет cvv-инвариантом относительно переменной Λ.

<u>Пример 8</u>. Рассмотрим cvv-инвариантные свойства двух пересекающихся на плоскости прямых линий l_1 и l_2, которые в декартовой прямоугольной системе координат описываются следующими функциями от переменной x:

$$y_1(x) = a_1 x + b_1 \text{ (a)} \qquad\qquad y_2(x) = a_2 x + b_2 \text{ (b)}. \qquad (47)$$

Параметры

$$a_1 = \mathrm{tg}\alpha_1,\ a_2 = \mathrm{tg}\alpha_2,\ b_1 = y_1(0),\ b_2 = y_2(0), \qquad (48)$$

а также α_1 и α_2 (углы, которые линии l_1 и l_2 составляют с осью X) не зависят от x.

После взаимного исключения явно выраженной переменной x из функций (47a) и (47b) и переноса по одну сторону от знака равенства членов, зависящих от x, получается cvv-равенство

$$a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x) = a_2 b_1 - a_1 b_2, \qquad (49)$$

в котором левая часть является cvv-инвариантом

$$I'_{1,2} = a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x). \qquad (50)$$

Смысл инварианта (50) выясняется при помощи правой части равенства (49), которая представляет собой величину и форму инварианта (50) при $x = 0$.

Известно [12, ф-ла (2.3-4)], что при $a_2 - a_1 \neq 0$ выражение

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} = y_c \qquad (51)$$

соответствует ординате y_c точки пересечения линий l_1 и l_2. Поэтому правая часть равенства (49) равна

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = (a_2 - a_1) y_c \qquad (52)$$

Геометрически правая часть равенства (52), следовательно, и правая часть равенства (49), соответствует величине отрезка, расположенного на оси X между точками пересечения этой оси с прямыми линиями l'_1 и l'_2, которые перпендикулярны линиям l_1 и l_2, соответственно. Подставляя параметры (48) в (50), получаем cvv-инвариант

$$I_{1,2} = y_1(x)\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - y_2(x)\cos\alpha_2\sin\alpha_1, \qquad (53)$$

подобный инварианту (1). Такое подобие подтверждает справедливость приведенного во введении утверждения об общности происхождения инвариантов (1) и (50).

Если обе части равенства (49) разделить на произведение $a_1 a_2 \neq 0$, то получится cvv-равенство

$$\frac{y_1(x)}{a_1} - \frac{y_2(x)}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}, \tag{54}$$

из которого для функций (47) следует другая форма cvv-инварианта

$$I''_{1,2} = \frac{y_1(x)}{a_1} - \frac{y_2(x)}{a_2}. \tag{55}$$

Правая часть равенства (54) представляет собой вид инварианта (55) при $x = 0$ и по величине совпадает с длиной отрезка, который расположен на оси X между её точками пересечения с прямыми линиями l_1 и l_2.

Если обе части равенства (49) разделить на разность $a_2 - a_1 \neq 0$, то (с учётом (51)) для функций (47) получится cvv-равенство

$$\frac{a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x)}{a_2 - a_1} = y_c, \tag{56}$$

которое содержит ещё один cvv-инвариант

$$I'''_{1,2} = \frac{a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x)}{a_2 - a_1}. \tag{57}$$

Согласно (56) величина этого инварианта равна ординате y_c точки пересечения прямых линий l_1 и l_2.

Выражения (56) и (57) справедливы для произвольной пары прямых линий в плоском пучке, имеющем центр с ординатой y_c. Поэтому все инварианты (57), соответствующие этим парам, оказываются равны друг другу.

Соотношения (56) и (57) для плоского пучка могут быть получены таким же образом и в случае, когда линии в пучке задаются уравнениями типа (см. [12, раздел 2. 2-1]):

$$y_i(x) - y_c = a_i(x - x_c), \tag{58}$$

где x_c, y_c - координаты точки пересечения, i - порядковый номер линии.

Следует напомнить, что при выводе МЛИ (1) неявно использовались именно инварианты (50) и (57). Для этих функций переменной величиной служит отрезок

<u>Пример 9</u>. Теперь рассмотрим две функции:

$$y_1(x) = \sin x\,, \qquad\qquad y_2(x) = \cos x\,. \tag{59}$$

Нетрудно показать, что для этих функций cvv-инвариантом будет

$$I^{'} = y_1^2(x) + y_2^2(x)\,, \tag{60}$$

или, что то же,

$$I^{''} = \sin^2 x + \cos^2 x\,, \tag{61}$$

поскольку, как известно, в этом случае $I^{'} = I^{''} = 1$. Для взаимного исключения переменной x из функций (59) можно использовать, например, хорошо известную формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,. \tag{62}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статья написана физиком и, прежде всего, для физиков, несмотря на то, что эта статья посвящена идентификации нового класса инвариантов, то есть, казалось бы, сугубо математической проблеме. Рассмотренные выше, так называемые, cvv-инварианты отличаются от остальных, прежде всего, тем, что их величины постоянны при изменении величины независимой переменной. Специфика применения cvv-инвариантов заключается в том, что сначала из математических функций (уравнений), имеющихся в конкретном распоряжении, формально получают cvv-инвариант. После этого проводят его изучение на предмет соответствия какому-либо определённому физическому явлению. Несколько формальный способ получения cvv-инвариантов позволяет распространить область их применения практически на всю физику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

[1] V.I. Smirnov, “A Meridional-beam Invariant for a Straight-light Generator Focon,” *Photonics and Optoelectronics*, **4**, 4, pp. 155 – 169, 1997.

[2] В.И. Смирнов, “Свойства фоконов с прямолинейной образующей. I. Меридионально-лучевой инвариант. Апертурные углы,” *Оптика и спектроскопия*, **86,** 4, сс. 694 – 701, 1999. (V.I. Smirnov, “Properties of Focons with a Linear Generatrix: I. The Meridional-Ray Invariant and Aperture Angles,” *Optics and spectroscopy*, **86**, 4, pp. 621-627, 1999.)

[3] В.И. Смирнов, “Свойства фоконов с прямолинейной образующей. II. Число отражений и длина пути меридионального луча,” *Оптика и спектроскопия*, **89,** 4, сс. 693 – 702,

2000, (V.I. Smirnov, “Properties of Focons with a Linear Generatrix: II. The Number of Reflections and the Path Length of a Meridional Ray,” *Optics and spectroscopy*, **89**, 4, pp. 693 – 702, 2000.)

[4] Г.Б. Гуревич, *Основы Теории Алгебраических* Инвариантов, ОГИЗ, Москва-Ленинград, 1948.

[5] *Задачи и Упражнения с Ответами и Решениями*. *Фейнмановские Лекции по Физике.* / Под ред. А.П. Леванюка, Мир, Москва, 1969. (*Exercises. The Feynman Lectures on Physics*, London, 1964 – 1965).

[6] А.В. Соколов, *Оптические свойства металлов,* Физматлит, Москва, 1961.

[7] М.-А. Тоннела, *Основы электромагнетизма и теории относительности*, ИЛ, Москва, 1962. (Tonnelat M.-A. *Les Principes de la Theorie Électromagnétique et de la Relativité*, Paris, 1959)

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Высшая школа, Москва, 1960.

[9] Л.Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, Т. 2, Высшая школа, Москва, 1973.

[10] С.М Тарг, Винтовое движение, *Физическая энциклопедия*, Под ред. А.М. Прохорова. Т. 1, СЭ, Москва, 1988.

[11] В.М. Левин, Дифракция света на ультразвуке, *Физическая энциклопедия*, Под ред. А.М. Прохорова, Т. 1, СЭ, Москва, 1988.

[12] Г. Корн и Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* Наука, Москва, 1977. (G.A. Korn, T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1968).

Abstract

Invariants Relative to Change of Value of the Independent Variable and their Role in the Physics.

V.I. Smirnov

It is identified the new class of invariants which values are constant at change of value of an independent variable. Their properties and a deriving method are shown on already known and still unknown instances, concerning to various areas of physics. In particular, new invariants for the straight lines intersected in one point on a plane have been discovered. The third is besides, discovered (not dependent on two already known) an invariant of an electromagnetic field for a special case of the special theory of relativity. The fact of such detection conflicts to the modern representations about electromagnetic field invariants.

Invariants Relative to Change of Value of the Independent Variable and their Role in the Physics.

V. I. Smirnov

Abstract

It is identified the new class of invariants which values are constant at change of value of an independent variable. Their properties and a deriving method are shown on already known and still unknown instances, concerning to various areas of physics. In particular, new invariants (50), (55) and (57) for the straight lines intersected in one point on a plane have been discovered. Besides, the request for detection of the third (not dependent on two already known) an invariant (31) electromagnetic fields for a special case of the special theory of relativity is made.

INTRODUCTION

In papers [1, 2] it has been shown, that parameters of a hollow focon (truncated cone) with a linear generatrix and the meridional ray propagated in it are related among themselves by a type invariant relation [2, f-la (9)]:

$$I_j = (-1)^j [R_j(x) \sin \varphi_j \cos \beta + r_j(x) \cos \varphi_j \sin \beta]. \qquad (1)$$

In the Cartesian rectangular frame X, Y in which the axis X coincides with a focon axis, the value I_j does not depend on value x. Therefore the right part of expression (1) is termed by meridional-ray invariant (MRI) and marked out as I_j. Besides, in (1) following labels are introduced.

$j = 0, 1, 2, 3, ... k+1$ - a reflection serial number in a focon.

k - number of reflections.

$R_j(x)$ - focon radius in a cross-section transiting through a point with an abscissa x. At the same time this cut places between two other cross-sections, each of which transits through a point of reflection with a serial number j and $j+1$, accordingly.

$r_j(x)$ - ordinate of a cross point of a ray with a plane containing radius $R_j(x)$.

φ_j - angle between an axis X and the segment of a ray arranged between points of reflection with serial numbers j and $j+1$.

β - a conicity of a focon (an angle between a generatrix and axis of a focon).

Expression (1) is noted for a case when the rectilinear segment of a ray is between reflection points j and $j+1$. However in [1, 2] it has been shown, that the equality $I_j = I_{j+1}$ occurs for all j.

With use of MRI in [1 - 3] formulas for aperture angles, numbers of reflections and a beam path length in a focon have been received. The virtue of these formulas consists that they are free from the restrictions superimposed earlier on value of conicity β.

During further study MRI it was became clear, that at its deduction unknown before invariants (50), (57), featuring properties of straight lines intersected on a plane implicitly were used. Moreover, it has appeared, that these invariants together with MRI (1) and others, already known invariants (for example, (12), (14), (21)), concern to the class of invariants, still not identified neither in the mathematics, nor in the physics. Invariants of this class differ from others, first of all, that their values do not depend on value of an independent variable that is contained by these invariants. For the purpose of simplification of a title and with the account of such independence, invariants concerning to this class, will be named further conventionally by cvv-invariants (cvv-change of value of a variable).

In addition, it was become clear, that many cvv-invariants could be obtained the common, a little formalized method. This method is grounded on it would seem, obvious and, nevertheless, a little known property, proper in many analytic functions. Apparently, insufficient popularity of this property explains that fact, what even invariants already used in physics though formally concerning to cvv-invariants, are not identified till now as a self-maintained class. There is an impression, that invariants relative to change of value of an independent variable (cvv-invariants) are not identified and in the mathematics. At the same time, existence of a common method of obtaining cvv-invariants allows rather simply to do a test many mathematical expressions about detection of the invariant relations comprising the helpful information, both for mathematics, and for physics.

Therefore the purpose of the present paper consists in that by means of already known and again obtained cvv-invariants to identify them as a new real class of the invariants having common properties and a common method of their deriving; besides, on concrete instances to show a gamut and potential possibilities of application of such invariants.

PROPERTIES CVV-INVARIANTS

In the present paper for a basis of concept "invariant" following definition [4] was accepted: «the invariant means not varying; as this term call all that, being definitely is related to considered mathematical objects, remains invariable at their some transformations». In a case cvv-invariants transformation is change of value of an independent variable entering into considered mathematical objects, and, hence, in cvv-invariants. After such definition becomes apparent, that for each concrete value j, MRI (1) is cvv-invariant.

At the basis of the formalized method of deriving of cvv-invariants, a little known property of many analytic functions from the same independent variable lays. This property consists that the functions specified on common for them assemblage of a legitimate value of an independent variable, are related among themselves by relations (invariants) which values remain constant at change of value of an independent variable.

Universality of a method of deriving of cvv-invariants allows using it in all areas of physics in which deal with the functions specified above. Properties of cvv-invariants and entity of a method of their deriving are the most convenient for considering on an instance taken from the collector [5].

So, in a task 8.2 [5, volume 1] is considered rectilinear motion of a mass point along trajectory $x(t)$ with constant acceleration a and with velocity $v_x(t)$. Thus, it is required to eliminate time t from two functions

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_{x0}t + x_0, \text{ (a)} \qquad v_x(t) = at + v_{x0} \text{ (b)} \tag{2}$$

and to show, that at any moment t the following equality is fulfilled:

$$v_x^2(t) = v_{x0}^2 + 2a[x(t) - x_0]. \tag{3}$$

Here x_0 and v_{x0} - initial values of a trajectory and a velocity, accordingly.

Really, full cross elimination of explicitly expressed variable t of relations (2) leads to equality (3) which is valid for any time t and consequently is identity. However, values of the left and right parts of this identity depend on concrete value t.

If term $2ax(t)$ depending from t to transfer from a right part of equality (3) to its left part, new equality

$$v_x^2(t) - 2ax(t) = v_{x0}^2 - 2ax_0 \tag{4}$$

also will be identity. However, owing to identity of equality (4), in this case not only the right part of this equality, but also its left part does not depend any more on value t. Therefore for functions (2) left part of equality (4) by definition is cvv-invariant and is marked out as

$$I_t = v_x^2(t) - 2ax(t). \tag{5}$$

The right part of equality (4) represents the shape and value of an invariant (5) at $t = 0$.

To distinguish identities of type (4) at which the value of each part of equality does not depend on value of an independent variable, from the identities having such association (for example, identity (3)), first will be named further invariant (cvv-)equalities.

Thus, cvv-invariant search is reduced to the cvv-equality deriving which one part represents naturally a cvv-invariant, and another – its value, which is discovered for any fixed value of an independent variable. Usually, this value is equal to null if considered initial functions in this null have no singularities.

CVV-invariant (5) is deduced because of the full elimination of explicitly expressed independent variable. However for functions (2) cvv-invariant it is possible to obtain and at partial elimination of this variable. Really, if at elimination t in expression (2a) to leave without change, for example, term $at^2/2$, equality, obtained after that for functions (2),

$$x(t)-\frac{v_0 v_x(t)}{a}-\frac{at^2}{2}=x_0-\frac{v_0^2}{a} \qquad (6)$$

also will be cvv-equality relative to change of variable t, and its left part

$$I_t^{'}=x(t)-\frac{v_0 v_x(t)}{a}-\frac{at^2}{2} \qquad (7)$$

will be a corresponding cvv-invariant.

Thus, for the same functions (2) it is possible to obtain some various cvv-invariant equalities and, accordingly, cvv-invariants. Besides, invariance of cvv-equality will be maintained, if to its each part to add the expression, which does not depend on a viewed variable, or if it is each part to multiply by such expression. It is natural, that these properties of cvv-equality are transferred and on a cvv-invariant.

Deriving of cvv-invariant expression of type (4) or (5) is, though also necessary, but only an initial step to obtaining of the new information. The following step, except knowledge of bases of mathematics from a high school course, demands already special knowledge in concrete area of examinations and certain level of the scientific intuition, necessary for detection of favor from the obtained cvv-invariant expression.

For example, if both parts of equality (4) to multiply by constant $m/2$ (m-material point mass) cvv-equality will be obtained

$$\frac{mv_x^2(t)}{2}-max(t)=\frac{mv_{x0}^2}{2}-max_0, \qquad (8)$$

which is invariant relative to change of time t. From equality (8) follows cvv-invariant

$$I_t^{ce} = \frac{mv_x^2(t)}{2} - max(t), \tag{9}$$

which already has the certain physical sense corresponding to a special case of a conservation law of a mechanical energy.

Among other things, instances of deriving of invariants (5) and (9) underline once again, as it is important to know about existence of cvv-invariants. If such knowledge were instead of equality (3), it would be possible to expect the demand to obtain more informative, invariant equality (4) or (8).

Therefore, a little formalized method of deriving of a cvv-invariant is reduced to the following. At first from analytic functions (in full or in part) mutually eliminate common for them, explicitly expressed independent variable. Thus it is supposed, that such elimination is admissible. Then, all terms depending on this variable, transfer on one side of the new equality obtained thus. This side of equality represents a required cvv-invariant.

OTHER INSTANCES OF CVV-INVARIANTS

Gamut of application and potential possibilities cvv-invariants we will show on an additional series of the instances taken from various areas physics.

Instance 1. In a vibration theory and in optics the so-called equation of an ellipse [6, f-la (1.24)] is widely known

$$\left(\frac{E_x(t)}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{a_1 a_2}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{10}$$

which is obtained after cross elimination of a variable (time) t from two functions

$$E_x(t) = a_1\cos(\omega t + \delta_1), \qquad E_y(t) = a_2\cos(\omega t + \delta_2). \tag{11}$$

These functions represent x - and y - components of a vector of electric field strength $\mathbf{E(t)}$ of the flat electromagnetic wave spread along axis Z. Thus other not dependent on time t components mark out: a_1, a_2 - vibration amplitudes, ω - circular frequency, $\delta = \delta_1 - \delta_2$ - a difference between phases δ_1 and δ_2.

Expression (10) is obtained from functions (11) by cross elimination of common variable t. Therefore, it is identity relative to this variable. As values right and, hence, left parts of expression (10) do not depend on a time t, this expression is cvv-equality. Therefore, left part of the (10)

$$I_t^{xy} = \left(\frac{E_x(t)}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{a_1 a_2}\cos\delta \tag{12}$$

represents cvv-invariant, linking functions (11) with each other. The right part of equality (10) corresponds to the shape and value of this invariant at $t = 0$.

Instance 2. Relations [6, f-las (7.20) and (7.21)]

$$I_1 = n_\varphi^2 - k_\varphi^2 = n^2 - k^2, \text{(a)} \qquad I_2 = n_\varphi k_\varphi \cos\chi_\varphi = nk, \text{(b)} \tag{13}$$

used in optics of metals, also concern to cvv-equalities. According to [6] in (13a) and (13b) the right equalities are termed as Ketteler's formulas , and left (I_1 and I_2) - optical invariants. However according to the definition accepted in the present paper, to properly invariants expressions concern

$$I_\varphi^1 = n_\varphi^2 - k_\varphi^2, \text{(a)} \qquad I_\varphi^2 = n_\varphi k_\varphi \cos\chi_\varphi. \text{(b)} \tag{14}$$

Equalities (13) are deduced from the following functions depending on angle φ of a falling of light on a flat metal surface:

$$n_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n^2 - k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi} \tag{15}$$

- index of refraction [6, f-la (7.9)],

$$k_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-n^2 + k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi} \tag{16}$$

- index of absorption [6, f-la (7.11)],

$$\cos\chi_\varphi = \frac{\sqrt{n^2 - k^2 - \sin^2\varphi + \Delta_\varphi}}{\sqrt{n^2 - k^2 + \sin^2\varphi + \Delta_\varphi}} \tag{17}$$

- cosine of the real angle of a refraction of light in metal [6, f-la (7.7)]. Thus

$$\Delta_\varphi = \sqrt{(n^2 - k^2 - \sin^2\varphi)^2 + 4n^2k^2}, \tag{18}$$

n and k - values n_φ and k_φ at $\varphi = 0$. Thus, equalities (13a) and (13b) are obtained after cross elimination of variable φ from functions (15), (16) and (15) - (17), accordingly.

The singularity of considered invariants consists that cvv-invariant I_1 relates among themselves two functions n_φ and k_φ whereas cvv-invariant I_2 - three functions n_φ, k_φ and χ_φ.

Instance 3. It appears, among already known invariants relative to this or that transformation of co-ordinates exist such, which simultaneously are also cvv-invariants.

So, in the special theory of relativity (STR) the equality is known

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2, \tag{19}$$

which each part represents a special case of quadrate of a four-dimensional space-time interval. This interval is an invariant relative to special lorentz-transformation [7, f-las (5.39)]

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20}$$

In STR such transformation it is valid in a case when one, Cartesian, frame S' moves relative to other same system S with constant velocity v, thus axes of co-ordinates of systems S' and S are parallel among themselves, and the vector of velocity $\mathbf{v}$ is parallel axes OX' and OX.

Now we will suppose, that in formulas (20) co-ordinate x and time t are functions from velocity v (thus x', t' do not depend on a velocity v). Then, after the full cross elimination of variable v, from these formulas it is easy to obtain equality, which will be precisely same, as (19). As parameters x' and t' do not depend from v the equality (19), being identity, is invariant relative to change of velocity v, and its left part

$$I_v = x^2 - c^2t^2 \tag{21}$$

represents corresponding cvv-invariant which besides simultaneously is an invariant relative to lorentz-transformation (20). In a considered case, the right part of cvv-equality (19) is the shape and value of cvv-invariant at $v = 0$.

For physics certain interest can represent and such cvv-invariants which are obtained from formulas (20) by a select in the capacity of an independent variable of other parameters entering into these formulas.

Instance 4. Let us show, that in the special case of STR considered above cvv-invariants exist and for an electromagnetic field. Thus, along with two known and not dependent from each other invariants, there is a third invariant non-dependent on them.

Therefore, in a considered case of STR formulas of lorentz-transformation of an electromagnetic field have the following appearance:

$$E_x = E_x^{'}, \text{(a)} \quad E_y = \frac{E_y^{'} + \frac{v}{c} H_z^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{(b)} \quad E_z = \frac{E_z^{'} - \frac{v}{c} H_y^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{(c)} \tag{22}$$

- for an electrical part of a field [8, f-la (24,5)],

$$H_x = H_x^{'}, \text{(a)} \quad H_y = \frac{H_y^{'} - \frac{v}{c} E_z^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{(b)} \quad H_z = \frac{H_z^{'} + \frac{v}{c} E_y^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{(c)} \tag{23}$$

- for a magnetic part of a field [8, f-la (24,6)]. Here $E_\alpha, H_\alpha\ (\alpha = x, y, z)$ - components of vectors of strengths electrical $\mathbf{E}$ and magnetic $\mathbf{H}$ fields, accordingly. Besides, in the general case of STR for a 4-tensor of electromagnetic field F_{ik} [8, f-la (23,7)] are known two invariants [8, f-las (25,1), (25,2)] relative to lorentz-transformation of this field

$$\mathrm{H}^2 - \mathrm{E}^2 = inv, \tag{24}$$

$$\mathbf{EH} = inv, \tag{25}$$

which are not dependent from each other.

If to consider relations (22a) and (23a) for a special case of STR invariants (24) and (25) can be rewritten as

$$I_{em1} = H_y^2 + H_z^2 - E_y^2 - E_z^2 = H_y^{'2} + H_z^{'2} - E_y^{'2} - E_z^{'2}, \tag{26}$$

$$I_{em2} = E_y H_y + E_z H_z = E_y^{'} H_y^{'} + E_z^{'} H_z^{'}. \tag{27}$$

Now we will suppose, that not hatched components E_α and H_α, entering into formulas (22) and (23), are functions from variable $\beta = v/c$ whereas the hatched components do not depend from β. To obtain the third cvv-invariant I_{em3}, it is necessary from formulas (22) and (23) crossly to eliminate explicitly expressed variable β.

For this purpose, we will equate to each other the denominators entering into the formulas (22 b) and (23 c). From the obtained equality we will discover

$$\beta = \frac{E_y^{'} H_z - E_y H_z^{'}}{E_y E_y^{'} - H_z H_z^{'}}. \tag{28}$$

Similarly, from (22c) and (23 b) we will obtain other expression for β:

$$\beta = \frac{E_z H'_y - E'_z H_y}{E_z E'_z - H_y H'_y}. \tag{29}$$

Now, we will equate to each other right parts of expressions (28) and (29). In the equality obtained thus addends with dashes and without them we will separate on its different sides. With the account of equality (27) from a new relation the cvv-equality, invariant relative to change β follows,

$$E_y E_z + H_y H_z = E'_y E'_z + H'_y H'_z. \tag{30}$$

Thus the left part of equality (30)

$$I_{em3} = E_y E_z + H_y H_z \tag{31}$$

is cvv-invariant relative to change β. It is easy to show, that expression (31) is also an invariant relative to lorentz-transformation (22), (23).

To show cross independence of invariants I_{em1}, I_{em2}, I_{em3}, we will consider each of them as function from four independent variables E_y, E_z, H_y, H_z. Besides, we will introduce one more, auxiliary function from the same variables

$$I_{em4} = E_y + E_z + H_y + H_z. \tag{32}$$

Then, functions I_{em1} - I_{em4} will be not dependent from each other [9, §42], if a Jacobian corresponding to it

$$J = \frac{\partial(I_{em1}, I_{em2}, I_{em3}, I_{em4})}{\partial(E_y, E_z, H_y, H_z)}, \tag{33}$$

at least in one point $(E_y, E_z, H_y, H_z)^{(0)}$, it is not equal to null. In a considered case

$$J = \begin{vmatrix} -2E_y & -2E_z & 2H_y & 2H_z \\ H_y & H_z & E_y & E_z \\ E_z & E_y & H_z & H_y \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tag{34}$$

$$= 2\left(H_y^2 - H_z^2 + E_y^2 - E_z^2\right)\left(H_y - H_z + E_z - E_y\right)$$

From (34) follows, that Jacobian $J = 0$ if one of relations occurs at least:

$$H_y^2 - H_z^2 = E_z^2 - E_y^2, \qquad H_y - H_z = E_y - E_z. \tag{35}$$

Equalities (35) are not identities. Therefore identically it is not equal to null and Jacobian J. Hence, invariants I_{em1} - I_{em3} are not dependent from each other.

Let us remind that the third invariant (31) is obtained for a special case of STR. At the same time, for a general case of STR it is considered to be [8], that invariants (24) and (25) (accordingly, (26) and (27)) are single independent. Detailed arguing of an apparent inconsistency is not included into a subject of reviewing of the present paper and consequently demands the separate analysis.

Instance 5. It is possible to show, that for formulas of transformation of the Cartesian rectangular co-ordinates [4, f-las (1.1)]

$$x(\theta) = \tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta + h, \qquad y(\theta) = \tilde{x}\sin\theta + \tilde{y}\cos\theta + k \tag{36}$$

also the cvv-invariant, but already relative to change of angle θ of rotational displacement of plane XY can be obtained. Here functions of angle θ are old co-ordinates $x(\theta)$ and $y(\theta)$ whereas new co-ordinates $\tilde{x}, \tilde{y}$ and values of their transpositions h, k from this angle do not depend. After cross elimination θ in formulas (36), the following cvv-equality relative to change of angle θ is obtained:

$$[x(\theta) - h]^2 + [y(\theta) - k]^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2. \tag{37}$$

Here the left part of equality (37)

$$I_\theta = [x(\theta) - h]^2 + [y(\theta) - k]^2 \tag{38}$$

is on the one hand cvv-invariant, and with another - an invariant relative to transformation of co-ordinates (36). Thus, the right side of equality (37) represents the shape and value of a cvv-invariant (38) at $\theta = 0$.

Instance 6. For specialists-mechanics can be of interest cvv-invariant, obtained, for example, from following formulas [10]:

$$v_M(r) = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}, \qquad w_M(r) = \sqrt{w^2 + r^2(\varepsilon^2 + \omega^4)}. \tag{39}$$

These formulas feature a helical motion consisting of a rectilinear translational motion of a mass point with velocity v and its rotary motion with angular velocity ω. Thus, the rotary motion happens round an axis which is parallel to a direction of translational velocity and from which the moving point will defend apart r.

Here, $w = dv/dt$, $\varepsilon = dw/dt$. Thus $v_M(r), w_M(r)$ - resultants a velocity and acceleration of a helical motion of a point, accordingly. Parameters $\boldsymbol{v}$, ω, $\boldsymbol{w}$ and ε do not depend from $\boldsymbol{r}$. Crossly excepting explicitly expressed variable $\boldsymbol{r}$ from functions $\boldsymbol{v_M(r)}$ and $\boldsymbol{w_M(r)}$, it is easy to obtain following cvv-equality relative to variable $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{w_M^2(r)}\omega^2 - \boldsymbol{v_M^2(r)}(\varepsilon^2 + \omega^4) = \boldsymbol{w}^2\omega^2 - \boldsymbol{v}^2(\varepsilon^2 + \omega^4). \tag{40}$$

By definition, the left part of equality (40)

$$\boldsymbol{I_r} = \boldsymbol{w_M^2(r)}\omega^2 - \boldsymbol{v_M^2(r)}(\varepsilon^2 + \omega^4) \tag{41}$$

is cvv-invariant, and right - its shape and value at $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

<u>Instance 7.</u> It is known, that the anisotropic Bragg diffraction of light on ultrasound (US) happens most effectively when light impinges on an anisotropic medium under the Bragg's angle [11, f-la (8)]

$$\theta_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{arcsin}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n_0}}\left[\frac{\lambda_0}{\Lambda} + \frac{\Lambda(\boldsymbol{n_0^2} - \boldsymbol{n_1^2})}{\lambda_0}\right]\right\}, \tag{42}$$

and diffracts under an angle [11, f-la (9)]

$$\theta' = \mathbf{arcsin}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n_1}}\left[\frac{\lambda_0}{\Lambda} - \frac{\Lambda(\boldsymbol{n_0^2} - \boldsymbol{n_1^2})}{\lambda_0}\right]\right\}. \tag{43}$$

Here λ_0 - length of an incident light wave, $\boldsymbol{n_0}$ and $\boldsymbol{n_1}$ - refractive indexes of a medium accordingly for an incident and diffracted wave.

Let in functions (42) and (43) independent variable is an US-wave length Λ. Then, after the full, cross elimination of Λ from these functions, it is possible to obtain identical equality

$$\boldsymbol{n_1}\,\mathbf{cos}\,\theta' = \boldsymbol{n_0}\,\mathbf{cos}\,\theta_{\boldsymbol{B}}, \tag{44}$$

which will relate among themselves angles $\theta_{\boldsymbol{B}}$ and θ'. In equality (44) only $\boldsymbol{n_0}$ does not depend on a variable Λ. Therefore, having divided both parts of (44) on $\mathbf{cos}\,\theta_{\boldsymbol{B}}$, we will obtain cvv-equality

$$\boldsymbol{n_1}\frac{\mathbf{cos}\,\theta'}{\mathbf{cos}\,\theta_{\boldsymbol{B}}} = \boldsymbol{n_0}, \tag{45}$$

which left part

$$I_{\Lambda} = n_1 \frac{\cos\theta'}{\cos\theta_B} \tag{46}$$

for functions θ_B and θ' will be a cvv-invariant relative to variable Λ.

Instance 8. We will consider cvv-invariant properties of two straight lines l_1 and l_2 intersected on a plane, which in the Cartesian rectangular frame are featured by following functions from variable x:

$$y_1(x) = a_1 x + b_1 \text{ (a)}, \qquad y_2(x) = a_2 x + b_2 \text{ (b)}. \tag{47}$$

Parameters

$$a_1 = \mathrm{tg}\alpha_1,\ a_2 = \mathrm{tg}\alpha_2,\ b_1 = y_1(0),\ b_2 = y_2(0), \tag{48}$$

and also α_1 and α_2 (the angles, which lines l_1 and l_2 make with axis X) do not depend from x.

After cross elimination of explicitly expressed variable x of functions (47a) and (47b) and transposition on one side from an equals sign of the terms depending from x, cvv-equality is obtained

$$a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x) = a_2 b_1 - a_1 b_2, \tag{49}$$

in which the left part is cvv-invariant

$$I'_{1,2} = a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x). \tag{50}$$

The sense of an invariant (50) is become clear by means of a right side of equality (49) which represents value and the shape of an invariant (50) at $x = 0$.

It is known [12, f-la (2.3-4)], that at $a_2 - a_1 \neq 0$ expression

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} = y_c \tag{51}$$

corresponds to ordinate y_c of a cross point of lines l_1 and l_2. Therefore, the right side of equality (49) is equal

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = (a_2 - a_1) y_c. \tag{52}$$

Geometrically the right part of equality (52), hence, and a right part of equality (49), corresponds to value of the segment arranged on axis X between cross points of this axis with straight lines l'_1 and l'_2 which are perpendicular to lines l_1 and l_2, accordingly. Substituting parameters (48) in (50), we obtain a cvv-invariant

$$I_{1,2} = y_1(x)\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - y_2(x)\cos\alpha_2\sin\alpha_1 \tag{53}$$

similar to an invariant (1). Such similarity confirms validity of the statement reduced in introduction about a generality of an origin of invariants (1) and (50).

If both parts of equality (49) to divide on product $a_1 a_2 \neq 0$ cvv-equality will be obtained

$$\frac{y_1(x)}{a_1} - \frac{y_2(x)}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}, \tag{54}$$

from which for functions (47) other form cvv-invariant follows

$$I''_{1,2} = \frac{y_1(x)}{a_1} - \frac{y_2(x)}{a_2}. \tag{55}$$

The right part of equality (54) represents form of an invariant (55) at $x = 0$ and on value coincides with length of a segment which is arranged on axis X between its cross points with straight lines l_1 and l_2.

If both parts of equality (49) to divide on difference $a_2 - a_1 \neq 0$, (with the account (51)) for functions (47) cvv-equality will be obtained

$$\frac{a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x)}{a_2 - a_1} = y_c, \tag{56}$$

which contains one more cvv-invariant

$$I'''_{1,2} = \frac{a_2 y_1(x) - a_1 y_2(x)}{a_2 - a_1}. \tag{57}$$

According to (56) value of this invariant is equal to ordinate y_c of a cross point of straight lines l_1 and l_2.

Expressions (56) and (57) are valid for any pair of straight lines in the flat bundle having centre with ordinate y_c. Therefore all invariants (57), corresponding to these pairs, appear are equal each other.

Expressions (56) and (57) for a flat bundle can be obtained in the same way and in a case when lines in a bundle are set by the type equations (see [12, section 2. 2-1]):

$$y_i(x) - y_c = a_i(x - x_c), \tag{58}$$

where x_c, y_c - cross point co-ordinates, i - a line serial number.

It is necessary to remind, that at deduction MRI (1) invariants (50) and (57) implicitly were used.

Instance 9. Now we will consider two functions:

$$y_1(x) = \sin x, \qquad y_2(x) = \cos x. \tag{59}$$

It is easy to show, that for these functions by a cvv-invariant will be

$$I' = y_1^2(x) + y_2^2(x), \tag{60}$$

or, that the same,

$$I'' = \sin^2 x + \cos^2 x, \tag{61}$$

as, as is known, in this case $I' = I'' = 1$. For cross elimination of variable x from functions (59) it is possible to use, for example, Euler's well-known formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{62}$$

INFERENCE

The paper is written by the physicist and, first, for physicists in spite of the fact that this paper is devoted identification of a new class of invariants, that is, it would seem, especially mathematical problem. Considered above, so-called, cvv-invariants differ from remaining, first, that their values are constant at change of value of an independent variable. Specificity of application of cvv-invariants consists that at first from the mathematical functions (equations) which are available at the concrete disposal, formally obtain a cvv-invariant. After that, spend its study about correspondence to any certain physical appearance. A little formal mode of deriving of cvv-invariants allows spreading area of their application practically to all physics.

REFERENCES:

[1] V.I. Smirnov, “A Meridional-beam Invariant for a Straight-light Generator Focon,” *Photonics and Optoelectronics*, **4**, 4, pp. 155 – 169, 1997.

[2] V.I. Smirnov, “Properties of Focons with a Linear Generatrix: I. The Meridional-Ray Invariant and Aperture Angles,” *Optics and spectroscopy*, **86**, 4, pp. 621-627, 1999.

[3] V.I. Smirnov, “Properties of Focons with a Linear Generatrix: II. The Number of Reflections and the Path Length of a Meridional Ray,” *Optics and spectroscopy*, **89**, 4, pp. 693 – 702, 2000.

[4] Г.Б. Гуревич, *Основы Теории Алгебраических* Инвариантов, ОГИЗ, Москва-

Ленинград, 1948.

[5] *Exercises. The Feynman Lectures on Physics*, London, 1964 – 1965.

[6] А.В. Соколов, *Оптические свойства металлов,* Физматлит, Москва, 1961.

[7] M.-A. Tonnelat. *Les Principes de la Theorie Électromagnétique et de la Relativité*, Paris, 1959)

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Высшая школа, Москва, 1960.

[9] Л.Д. Кудрявцев, *Математический анализ*, Т. 2, Высшая школа, Москва, 1973.

[10] С.М Тарг, Винтовое движение, *Физическая энциклопедия*, Под ред. А.М. Прохорова. Т. 1, СЭ, Москва, 1988.

[11] В.М. Левин, Дифракция света на ультразвуке, *Физическая энциклопедия*, Под ред. А.М. Прохорова, Т. 1, СЭ, Москва, 1988.

[12] G.A. Korn, T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1968.